Jakintza-arloa: Matematika

Dirichlet-en L funtzioen batezbesteko balioak eta L funtzio orokortua

Egilea: **Mª JOSE ZARATE AZKUNA**

Urtea: 1984

Zuzendaria: CATALINA CALDERON GARCIA

Unibertsitatea: UPV-EHU

ISBN: 978-84-8438-318-5

Hitzaurrea

Memoria honen bidez 1984.eko apirilaren 12an Matematika-doktoretza lortu nuen Euskal Herriko Unibertsitateko Zientzi Fakultatean.

Matematikaren alorrean, zehazki “Zenbakien Teoria Analitikoa” izeneko atalari dagokionean, Dirichlet-en L-funtzioen eta Riemann-en Zeta funtzioaren zenbait propietateren estudioa aztergai izaten jarraitzen du egungo ikerkuntza lanetan.

Esaterako, Zeta funtzioaren zero ez-nabariei buruzko Riemann-en aieru ospetsua zein geroago Pilt-ek L-funtzioen zeroei hedatutako aieru bera ere, gaur egunera arte ezin izan dira ez frogatu ezta ezeztatu ere. Are gehiago, Zeta funtzioaren ordenari buruzko Lindelöf-en aierua bera ere, aurrean aipatutakoak baino ahulagoa izan arren, ez da frogatzerik lortu.

Aieru famatu horiek Matematikaren hainbat problema irekirekin loturik daude, eta hau dela eta hipotesi hauen ebazpena erabat emankorra gertatuko litzateke, nahiz eta ebazpen horietatik urrun gauden oraindik.

Tesi honetan, lehendabizi, Dirichlet-en L-funtzioen eta hauen berreturen batez besteko balioak aztertzen dira. Batez besteko balioaren gaia aztertzen da, ordenaren azterketa baino errazagoa delako (gogora dezagun Lindelöf-en aierua oraindik frogatu gabe dagoela). Gaur egun gai honi buruzko emaitza berriak aurkitu daitezke Matematika-literaturan.

Dirichlet-en L-funtzioen zero ez-nabariei buruzko gaiari dagokionez, analitikoki plano konplexu osora hedatzeko L-funtzioen propietatearen eta L-funtzioen zero ez-nabarien kokapenaren arteko menpekotasunik ez dagoela erakusten da Tesian.

Azkenik, Tesian, funtzio aritmetiko batzuen baturen estimazioak frogatzen dira Dirichlet-en serieen propietateak erabiliz. Oro har, funtzio aritmetiko interesgarri askoren propietateak aztertzeko Dirichlet-en L-funtzioen propietateak erabiltzen dira teknika desberdinak direla medio.

Matematika-literaturan eta, bereziki, Zenbakien Teoria Analitikoaren hainbat liburutan, Riemann-en Zeta funtzioa, Dirichlet-en L-funtzioak eta hauek baino beste funtzio orokorrago batzuk tratatzen dira. Gaur egun ere, Ikerkuntza matematikoa jorratzen duten zenbait aldizkaritako artikuluetan funtzio hauen propietateen azterketa ikerkuntza-gaia izaten jarraitzen du.

Mª Jose Zarate
Leioan, 2010eko uztaila emantazabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

ZIENTZI FAKULTATEA

MATEMATIKA SAILA

DIRICHLET-EN L-FUNTZIOEN BATEZBESTEKO BALIOAK ETA L-FUNTZIO OROKORTUA

MARIA JOSE ZARATE AZKUNA

Zientzietan (Matematika Saila)
Doktoretza-Gradua lortzeko
aurkezten den MEMORIA

Memoria hau EHU-ko Zenbaki Teoriaren Irakasle Adjuntua den Catalina Calderón García doktorearen zuzendaritzapenean egina izan da eta nire eskerrik beroenak azaldu nahi dizkiot. Beraren lankidetza iraunkorra eta gida-lan eragile eduki ezik, lan honen burutzapena zeharo ezina zatekeen.

Era berean, EHU-ko Zenbaki Teoriaren Katedraduna eta Matematika Departamentuko Zuzendaria den Emiliano Aparicio Bernardo doktoreari nire eskerrak agertu nahi dizkiot; berak, Zenbaki Teoriaren Mintegian, Tesi-gaiari buruz nik aurkezturiko txostena entzun du, eta kontutan izan ditudan aholkuak eman dizkit.

Azkenik, Jose Ramon Etxebarriari, lan honen euskal textuaren idazketaren zuzenketa eskertu behar diot.

AURKIBIDEA

III. ATALA: L-FUNTZIO OROKORTUA.

IV. ATALA: L-FUNTZIOAREN APLIKAZIOAK ADIERAZPEN ASINTOTIKOEN KALKULURAKO.

HITZAURREA

Dirichlet-en L-funtzio izenaz ezagututako aldagai konplexudun funtzioak, 1.837. urtean L. Dirichlet jaunak sartuak izan ziren, progresio aritmetikoetan zenbaki lehenen distribuzioari buruz bere ikerketak egiten ari zelarik. Hala, edozein k zenbaki oso eta positibotarako "k moduludun zertasunak" deritzen $\chi(n)$ funtzioak sartzen ditu, hauek funtzio aritmetiko guztiz biderkakorrak eta $(n,k) = 1$ denean $\chi(n) = 0$ eta $(n,k) > 1$ denean $\chi(n)$ unitatearen $\varphi(k)$-garren erro bat direlarik, $\varphi(n)$ Euler-en funtzio aritmetikoa izanik. k moduludun χ zertasun bakoitzari L. Dirichlet-ek aldagai konplexudun funtzio bat, $L(s,\chi)$, elkartzen dio, Dirichlet-en L-funtzioa deritzana eta ondoko seriez definitua:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad , \quad s = \sigma + it \ ,$$

serie hori $Re(s) > 1$ planoerdian absolutuki konbergentea delarik. Gainera, χ k moduludun zertasun ez-nagusia bada, seriea $Re(s) = \sigma > 0$ planoerdian konbergentea da, eta, Dirichlet-en se rieen propietate orokorren arauera, $Re(s) = \sigma > 0$ planoerdiaren barneko multzo trinko bakoitzean uniformeki konbergentea da eta beraren batura funtzioa, $L(s,\chi)$, planoerdi horretan analitikoa da. Baldin χ k moduludun zertasun nagusia bada, hau da, $\chi = \chi_0$ bada, serie hori uniformeki konbergentea da $Re(s) = \sigma \geqslant 1 + \varepsilon$ planoerdian eta beraren batura funtzioa, $L(s,\chi_0)$, analitikoa da $Re(s) = \sigma > 1$ planoerdian.

$k = 1$ kasuan, 1 moduludun zertasun bakarra identikoki berdin 1 denez, aurreko serieak ondoko forma hartzen du:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad ;$$

serie horrek $Re(s) > 1$ planoerdian Riemann-en zeta funtzioa, $\zeta(s)$, adierazten duelarik.

k moduludun zertasunak funtzio aritmetiko guztiz biderkakorrak direnez gero, Dirichlet-en serieetarako Euler-en identitatea kontutan izanik, $Re(s) > 1$ planoerdian $L(s,\chi)$ funtziorako hurrengo identitate hau ateratzen da:

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} ,$$

non p delakoak zenbaki lehen guztiak korritzen baititu eta biderkaketa infinitua planoerdi horretan absolutuki konbergentea baita. $L(s,\chi)$-ren biderkaketa infinituzko adierazpen horretatik, $L(s,\chi)$ funtzioak $Re(s) > 1$ planoerdian zerorik ez duela ateratzen da.

χ k moduludun zertasun nagusia bada, $\chi = \chi_o$ bada, Re(s) planoerdian $L(s,\chi_o)$ funtzioa $\zeta(s)$ funtziotik faktore ez-nul batez desberdintzen da, hau da:

$$L(s,\chi_o) = \zeta(s) \prod_{p|k} (1 - \frac{1}{p^s})$$

non p delakoak k zenbakia zatitzen duten zenbaki lehen guztiak korritzen baititu. $\zeta(s)$ funtzioa s=1 puntuan izan ezik (non 1 hondarrezko polo sinplea baitu) plano konplexu osoan analitikoa denez, azken berdintzatik zera ateratzen da: $L(s,\chi_o)$ funtzio analitikoa da plano konplexu osoan, s = 1 puntuan izan ezik, non

$$\prod_{p|k} (1 - \frac{1}{p}) ,$$

hau da, $\frac{\varphi(k)}{k}$ hondarrezko polo sinple bat baitu, φ Euler-en funtzioa izanik. Horrela, $L(s,\chi_o)$ funtzioaren estudioa $\zeta(s)$ funtzioarenera laburtzen da.

$L(s,\chi)$ funtzioak, non χ k moduludun jatorrizko zertasuna baita, plano konplexu osoan

$$L(s,\chi) = \alpha(s,\chi)\ L(1-s,\bar{\chi})$$

eratako akuazio funtzionala egiaztatzen du, eta $k > 1$ bada, $L(s,\chi)$ funtzioa osoa da.

Dirichlet-en serieen batezbesteko balioaren teoremetan oinarrituz, $Re(s) > 1$ planoerdian $L(s,\chi)$ funtziorako eta beronen berredura osoetarako batezbesteko balioaren emaitzak atera ditzakegu. Batezbesteko balioen problema korapilatu egiten da $\frac{1}{2} < Re(s) \leq 1$ zerroan edo $Re(s) = \frac{1}{2}$ zuzenean aztertzen denean. Bestalde, batezbesteko balioz estimatu nahi dugun $L(s,\chi)$ funtzioaren berreduraren ordena zenbat eta handiagoa izan, problema zailtasuna ere handiagoa egiten da.

$L(s,\chi)$ funtzioaren eta beraren berreduren batezbesteko balioaren emaitzak ondoko bi formuletariko baten estimazioz eman daitezke, hots,

$$\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^{2c}\, dt$$

integralaren estimazioz, c delakoa generalki zenbaki oso eta positiboa, eta χ k moduludun edozein zertasun edo jatorrizko zertasun bat direlarik, edo

$$\sum_{\chi \in K} \int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^{2c}\, dt$$

formularen estimazioz, K delakoa, k moduludun zertasun guztien multzoa, edo k moduludun jatorrizko zertasunen multzoa, edo k edo k baino modulu txikiagodun zertasun erreal ez-nagusien multzoa delarik, aztertu nahi den kasuaren arauera.

$Re(s) = \frac{1}{2}$ zuzen kritikoan aurreko integralaren edo integralen baturaren $c(k)T^{1+\varepsilon}$ eratako bornapenak lortu nahi dira, ε hautazko zenbaki erreal positiboa izanik; lortu nahi den bornapenean T^{ε} berredura logT delakoaren berredura batez ordezkatzen denean edo bornapen baten ordez berdintza asintotikoa bilatzen denean, arazoa korapilatu egiten da.

H. L. Montgomery-k ondoko batezbesteko balioaren erresultatua ematen du (41):

$T \geqslant 2$ eta $\frac{1}{2} - (\log kT)^{-1} \leq \sigma \leq \frac{1}{2} + (\log kT)^{-1}$ balioetarako hurrengo hau egiaztatzen da:

$$\sum_{\chi}{}^{*} \int_{-T}^{T} | L(\sigma + it,\chi) |^4 \, dt \ll \varphi(k) \, T \, (\log kT)^4,$$

non $\sum^{*}$ ikurrak k moduludun jatorrizko zertasun guztiei hedaturiko batura adierazten baitu.

P. X. Gallagher-ek (23), k moduludun zertasun ez-nagusietarako eta $h \geqslant 1$ delarik Norton-ek emandako

$$\sum_{a=1}^{k} \left| \sum_{b=1}^{h} \chi(a+b) \right| \ll kh$$

erresultatuan oinarrituz, $Re(s) = \frac{1}{2}$ zuzen kritikoan k moduludun Dirichlet-en L-funtzioen batezbesteko balioetarako ondoko bornapena frogatzen du:

$$\int_{-T}^{T} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \right|^2 dt \ll (k + T) \log kT,$$

$T \geqslant 2$ izanik.

K. Ramachandra-k (48) zera agertzen du, l 1 baino zenbaki handiagoa, χ k moduludun zertasuna eta $T \geqslant 3$ badira, orduan $\left| \sigma - \frac{1}{2} \right| \leqslant (100 \log (kT))^{-1}$ tarterako

$$\sum_{\chi \bmod k} \int_{-T}^{T} L(\sigma+it,\chi)^{2l} \, dt \ll (kT)^{1/2} (\log kT)^{100k^2} \exp\left(\frac{k}{2}(\log k)^{\frac{1}{2}}\right)$$

bornapena betetzen dela, bornapen hori σ aldagaian uniformea izanik.

M. Jutila-k (34) $(D|n)$ Kronecker-en sinboloz definituriko D moduludun χ_D zertasun errealei elkarturiko Dirichlet-en L-funtzioetarako, batezbesteko balioaren teorema bat ematen du, non D delakoa $D \equiv 0$ edo 1 (mod 4) baldintza betetzen duen zenbaki osoa eta ez-karratua den. Teorema horren frogapena Dirichlet-en zertasun errealdun polinomioei buruzko batezbesteko balioaren teorema batetan eta $L(s,\chi)$ funtziorako Ramachandra-k emandako ondoko adierazpenean oinarritzen da:

χ delakoa jatorrizko zertasun ez-nagusia eta $U \geqslant 2$ badira, izan bedi

$$L(s,\chi) = \psi(s,\chi) \, L(1-s,\bar{\chi})$$

ekuazioa $L(s,\chi)$ funtzioaren ekuazio funtzionala; orduan,

$s = \frac{1}{2} + it$ eta $0 < \beta < 1$ direnean, hurrengo hau dugu:

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-s}\, e^{-n/U} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\, w = -\beta - \frac{1}{2}} \psi(s+w,\chi) \left(\sum_{n > U} \bar{\chi}(n)\, n^{-1+s+w} \right) \Gamma(w)\, U^{w}\, dw -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re} w = -\beta} \psi(s+w,\chi) \left(\sum_{n \leq U} \bar{\chi}(n)\, n^{-1+s+w} \right) \Gamma(w)\, U^{w}\, dw$$

Hala, M. Jutila-k $X \geqslant 3$ eta $T > 0$ direnean ondoko bornapena egiaztatzen dela frogatzen du:

$$\sum_{|D| \leq X}{}' \int_{-T}^{T} |L(\tfrac{1}{2} + it, \chi_D)|^2 dt \ll XT \log^{16}(X(T+1))$$

non $\sum'$ ikurrak $D \equiv 0$ edo $1 \pmod 4$ baldintza betetzen duten D zenbaki oso eta ez-karratuei hedaturiko batura adierazten baitu.

K. Ramachandra-k (50) $L(s,\chi)$ funtziorako hurrengo batezbesteko balioaren erresultatu hau ematen du:

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \int_{0}^{H} |L(\tfrac{1}{2} + it, \chi)|^2\, dt =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k} H \log kT + O\,(T\,(\log kT)^{\varepsilon}\,),$$

non χ k moduludun edozein zertasun, $H > 0$, $\varepsilon > 0$ eta $T = H + 2$ diren eta "O" ikurraren barneko konstantea soilik ε delakoaren menpean dagoen.

V. V. Rane-k (52) K. Ramachandra-ren erresultatua hobatzen du. Horretarako, lehendabizi Hurwitz-en $\zeta(s,\alpha)$ funtziorako ekuazio funtzional hurbildu bat lortzen du eta, ekuazio honetatik abiatuz, $\zeta(s,\alpha)$ funtziorako batezbesteko balioaren ondoko teorema agertzen du:

$$\int_1^T \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2} + it,\alpha\right)\right|^2 dt = T \log T + T(c(\alpha) + \gamma - \log 2\pi - 1) -$$

$$- \frac{1}{\alpha} + O(\alpha^{-\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} \log T),$$

uniformeki T eta α aldagaietan. Azkenez, estimazio horretan oinarrituz zera frogatzen du:

$T \geqslant 2$ eta $k \geqslant 1$ badira, orduan

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \int_1^T \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right|^2 dt =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k} T \log T + \left\{(T-1)\left(2\gamma - \log 2\pi - 1 + \log k + \sum_{p \mid k} \frac{\log p}{p-1}\right)\right\} +$$

$$+ O\left(T^{\frac{1}{2}} \log T\right)$$

erresultatua dugu, γ Euler-en konstantea delarik.

Geroago, V. V. Rane-k (53) jatorrizko zertasunei elkarturiko Dirichlet-en L.- funtzioetarako, batezbesteko balioaren teorema hau frogatzen du:

Izan bitez χ k moduludun zertasun bat, X = kT, N k moduludun jatorrizko zertasunen kopurua eta r k zenbakiaren faktore lehen eta desberdinen kopurua. Orduan, $T \geq 2$ denerako zera dugu:

$$\frac{1}{N} \sum_{\chi}{}^{*} \int_{T}^{2T} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^4 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} T \log^4 X + O(2^r T \log^3 X (\log\log 3k)^5),$$

non $\sum^{*}$ ikurrak k moduludun jatorrizko zertasunei hedaturiko batura adierazten duen.

k = 1 kasuan Riemann-en zeta funtziorako Ingham-en erresultatua lortzen da:

$$\int_{T}^{2T} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^4 dt = \frac{T}{2\pi^2} \log^4 T + O(T \log^3 T).$$

Gainera, (53) , batezbesteko balioaren ondoko estimazioa ere ematen du:

k moduludun edozein χ jatorrizko zertasunetarako eta $T \geq 2$ denerako, hauxe egiaztatzen da:

$$\int_T^{2T} \left| L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^4 dt = 2T \sum_{\substack{n \leq kT \\ (n,k)=1}} \frac{d^2(n)}{n} + O\left(kT \log^3 kT\right).$$

Lan honetan lortzen ditugun batezbesteko balioaren teorema gehienak, jatorrizko zertasunei elkarturiko Dirichlet-en L-funtzioetarako Chandrasekharam-ek eta Narasimhan-ek emandako ondoko ekuazio funtzional hurbildutik abiatuz (10) frogatuko dira, alegia, ondoko ekuaziotik abiatuz:

$$L(s,\chi) = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} + E(\chi)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \sum_{n \leq y} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}}$$

$$+ O(x^{-\sigma}) + O(y^{\sigma-1}\, t^{\frac{1}{2}-\sigma}),$$

non χ k moduludun jatorrizko zertasuna, $2\pi x y = k\,|t|$, $s = \sigma + it$, $x > M > 0$, $y > M > 0$, $\sigma > 0$, $|t| > c$ (c konstante egoki bat izanik),

$$a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ errespektiboki } \chi(-1) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \text{ balioen arauera,}$$

eta,

$$E(\chi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \displaystyle\sum_{r=0}^{k-1} \chi(r)\, e^{\frac{2\pi r}{k} i} & ; \ a = 0 \text{ denean;} \\[2ex] -\dfrac{i}{\sqrt{k}} \displaystyle\sum_{r=0}^{k-1} \chi(r)\, e^{\frac{2\pi r}{k} i} & , \ a = 1 \text{ denean} \end{cases}$$

diren.

Hala, I. atalean, Dirichlet-en serietarako batezbesteko balioaren teoremen bidez, $Re(s) > 1$ planoerdian $L(s,\chi)$-ren berreduretarako batezbesteko balioaren estimazioak lortzen ditugu. Horretaz gainera, goian aipaturiko $L(s,\chi)$-ren ekuazio funtzional hurbildutik abiatuz, $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ zerroan

$$\int_1^T |L(s,\chi)|^2 dt = T\, L(2\sigma,\chi_o) + O(T^{\frac{5-2\sigma}{4}})$$

formula betetzen dela frogatzen dugu; eta emaitza horretatik zera ondorioztatzen da:

"χ k moduludun jatorrizko zertasun bat bada, k zenbaki osoa eta 1 baino handiagoa izanik, orduan $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian hauxe dugu:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T |L(s,\chi)|^2 dt = L(2\sigma,\chi_o),$$

non χ_o k moduludun zertasun nagusia eta $s = \sigma + it$ diren".

$Re(s) = \frac{1}{2}$ zuzen kritikorako ondoko hau frogatzen dugu:

"Izan bedi χ k moduludun jatorrizko zertasun bat, k zenbaki osoa eta 1 baino handiagoa delarik. Orduan, $Re(s) = \frac{1}{2}$ zuzenerako hurrengo hau betetzen da:

$$\int_2^T |L(\tfrac{1}{2} + it,\chi)|^2 dt = \frac{\varphi(k)}{k} T \log kT + O(T \log^{3/4} kT),$$

φ Euler-en funtzio aritmetikoa izanik.

II. atalean zerro kritikorako $L(s,\chi)$ funtzioaren berreduren batezbesteko balioei buruzko emaitzak lortzen ditugu. Berriz ere $L(s,\chi)$ funtziorako Chandrasekharam-ek eta Narasimhan-ek emandako ekuazio funtzionaletik abiatuz, $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ zerrorako zera frogatzen dugu:

$$\int_1^T |L(s,\chi)|^4 dt = T \frac{L^4(2\sigma,\chi_0)}{L(4\sigma,\chi_0)} + O\left(T^{\frac{3}{2}-\sigma+\varepsilon}\right) +$$

$$+ O\left(T^{\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{4}(2-2\sigma+\varepsilon)} \log^{\frac{\gamma}{4}} T\right)$$

bertan α, β eta γ zenbaki oso eta ez-negatiboak, $\alpha+\beta+\gamma=4$ eta gehienez hauetariko bat nulua direlarik. Adierazpen horretatik hauxe ondorioztatzen da:

" χ delakoa k moduludun jatorrizko zertasun ez-nagusia bada, orduan $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian hurrengo emaitza hau egiaztatzen da:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T |L(s,\chi)|^4 dt = \frac{L^4(2\sigma,\chi_0)}{L(4\sigma,\chi_0)}$$

χ_0 delakoa k moduludun zertasun nagusia eta $s = \sigma + it$ direlarik".

c delakoa 2 baino handiagoa den zenbaki oso, bat denean $1-\frac{1}{c} < \sigma \leq 1$ zerrorako hauxe frogatzen dugu:

$$\int_1^T |L(s,\chi)|^{2c}\,dt = T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(d_c(n))^2\chi_0(n)}{n^{2\sigma}} + O\left(T^{3/2-\sigma+\varepsilon}\right) +$$

$$+ O\left(T^{\varepsilon}\max(T^{c(1-\sigma)}\log kT,\ \log^2 kT)\right) + O\left(T^{\frac{\alpha}{2c}+\frac{\beta}{2c}(c(1-\sigma)+\varepsilon)}\right),$$

non α eta β zenbaki oso eta ez-negatiboetarako $0<\alpha+\beta\leq 2c$ desberdintzak betetzen diren, eta ε hautazko zenbaki erreala den.

Adierazpen horretatik ondoko hau ondorioztatzen da:

"χ k moduludun jatorrizko zertasun ez-nagusia bada, orduan, $\mathrm{Re}(s) > 1-\frac{1}{c}$ planoerdian

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T |L(s,\chi)|^{2c}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(d_c(n))^2\chi_0(n)}{n^{2\sigma}}$$

erresultatua dugu, non χ_0 k moduludun zertasun nagusia eta $s=\sigma+it$ diren, eta non $d_c(n)$ funtzio aritmetikoak n zenbakia c faktoredun biderkadurezko adierazpideen kopurua ematen duen".

Bestalde, Dirichlet-en serieetarako Carlson-en teoreman oinarrituz, (59), c delakoa $0<c\leq 2$ baldintza betetzen duen zenbaki erreala denean, $(L(s,\chi))^c$ funtziorako ondoko ba-

tezbesteko balioaren teorema hau frogatzen dugu:

"Izan bitez χ k moduludun jatorrizko zertasun bat, k zenbaki osoa eta 1 baino handiagoa, eta χ_o k moduludun zertasun nagusia. Orduan, $0 < c \leq 2$ bada, $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian hauxe betetzen da:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^{2c}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_c(n))^2 \chi_o(n)}{n^{2\sigma}} ,$$

$s = \sigma + it$ izanik eta $d_c(n)$ delakoa edozein p zenbaki lehenetarako eta edozein m zenbaki osotarako

$$d_c(p^m) = \frac{\Gamma(c+m)}{\Gamma(c)\ m!}$$

formulaz definituriko funtzio aritmetiko biderkakorra delarik".

Azpimarra dezagun ezen c zenbakia arrunta denean, azken teoreman definituriko $d_c(n)$ funtzio aritmetikoa eta azkenaurreko teoreman aipatutakoa, bat direla.

Hurrengo atalean eraiki egiten dira, $L(s,\chi)$ funtzioa orokortzen duten funtzioak, zeintzuek $L(s,\chi)$ funtzioaren zero ez-nabari berberak dituzten.

1884. urtean Piltz-ek Dirichlet-en L-funtzioak $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian anulatzen ez direla antzeman zuen, eta hipotesi hori $\zeta(s)$ funtziorako Riemann-ek emandakoaren orokorpena da. Aieru hori XIX. mendearen bukaerako eta mende honetako Matematikaren problema ireki ospatsuenetariko bat bihurtu da, matema tikari oso inportanteek aztertu izan dutelarik. Hala ere, beraren egitasuna edo faltsutasuna ez dira oraindik frogatuak izan. Halarik ere, Zenbakien Teorian hainbat lan daude hipotesi horren egiatasunetik abiatzen direnak.

Dirichlet-en L-funtzioen zeroen banaketari buruzko problema partzialki ebatzia izan da, zerorik gabeko eskualde batzu lortzeaz. Ekarpen garrantzizkoenak matematikari ospatsuenenak izan dira, alegia, E. Hecke (28), Littlewood (13), Chudakov (13, 14) eta C. L. Siegel (20) eta besterenak.

Problema hori tratatzeko beste modu bat zera da: propietate analitiko bereziak (ekuazio funtzionala, Dirichlet-en seriezko garapena edo Euler-en biderkadurazko garapena) betetzen dituzten funtzioak eraikitzea eta beraien zeroen banaketa lortzea, edo beraien zeroek baldintzaren bat (Piltz-en hipotesia edo $L(s,X)$-ren zero berberak izatea) betetzen duteneko funtzioak eraikitzea eta funtzio hauek egiaztatzen dituzten propietate analitikoak lortzea. Hala, Dirichlet-en L-funtzioen propietate analitikoen eta zeroen banaketaren arteko menpekotasuna ezagutzen saiatzen dira. Bide honetan aipa daitezke (24), (46) eta (48) artikuluak.

Azken bide horretatik jarraituz, $L(s,\chi)$ funtzioaren zero ez-nabari berberak dituzten $F(s,\chi)$ funtzioak eraikitzen ditugu, χ k moduludun zertasuna eta $s = \sigma + it$ direlarik. Horretarako, zenbaki oso eta positiboen q_n segida hertsiki gorakor bat kontsideratzen da, zeinek ondoko baldintzak betetzen di tuen:

a) p_n delakoak n-garren zenbaki lehena adierazten badu eta n_o zenbaki arrunten bat bada, n_o edo n_o baino handiagoa den edozein n zenbaki arruntetarako, $p_n \leq q_n \leq p_{n+1} + 0(1)$ desberdintzak betetzen dira, 0(1) ikurrez adierazitako funtzio aritmetikoa positiboa izanik. $q_1, q_2, \ldots, q_{n_o - 1}$ delakoak zenbaki osoak eta 1 baino handiagoak dira.

b) n zenbaki arrunt guztietarako $q_n \equiv p_n \pmod{k}$ dugu, k delakoa emandako edozein zenbaki oso eta positibo delarik.

Orduan, $\{q_n\}$ segida batetarako eta k moduludun χ zertasun batetarako, $F(s,\chi)$ aldagai konplexudun funtzio bat definitzen da $Re(s) > 1$ planoerdian, ondoko biderkadura infinituaren bidez:

$$F(s,\chi) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \chi(q_n)\, q_n^{-s})^{-1}$$

Funtzio horrek Dirichlet-en $L(s,\chi)$ funtzioa orokortzen du (aski da edozein n-tarako $q_n = p_n$ egitea), eta honen antzera, ez da anulatzen $Re(s) > 1$ planoerdian; gainera, planoerdi horretan analitikoa da.

$Re(s) > 1$ planoerdian funtzio laguntzaile bat, $h_\chi(s)$, ere definitzen dugu ondoko eran:

$$h_\chi(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \chi(p_n)\, p_n^{-s})\, (1 - \chi(q_n)\, q_n^{-s})^{-1}$$

Hala, $Re(s) > 1$ planoerdian hurrengo berdintza dugu:

$$F(s,\chi) = h_\chi(s)\, L(s,\chi).$$

$h_\chi(s)$ funtziorako ondorengo teorema hau frogatzen da: "$h_\chi(s)$ funtzioa definitzen duen biderkadura infinitua absolutuki konbergentea da $Re(s) > 0$ planoerdian eta uniformeki konbergentea $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, $|t| \leq T$ multzo trinkoetan, σ_0, σ_1 eta T edozeintzu konstante erreal, $\sigma_1 > \sigma_0 > 0$ eta $T > 0$ direlarik. Honelatan, ba, $h_\chi(s)$ funtzioa analitikoa da $Re(s) > 0$ planoerdian eta ez da anulatzen planoerdi horretan".

Azken emaitza hori eta $L(s,\chi)$ funtzioaren propietateak kontutan hartuz, zera frogatzen da:

"$F(s,\chi)$ funtzioak, χ k moduludun zertasuna izanik, ondoko propietateak ditu:

1) $F(s,\chi) \neq 0$ da $Re(s) > 1$ planoerdian

2) $F(s,\chi)$ funtzioa analitikoki luzatzen da $Re(s) > 0$ planoerdira, $F(s,\chi) = h_\chi(s)\, L(s,\chi)$ adierazpenaren bidez.

3) $Re(s) > 0$ planoerdian $F(s,\chi)$ funtzioak $L(s,\chi)$ funtzioaren zero berberak anizkoiztasun berberekin ditu.

4) χ_0 k moduludun zertasun nagusia bada, orduan $F(s,\chi_0)$ funtzioak $s=1$ puntuan r hondarrezko polo sinple bat du, non

$$0 < r \leq \frac{\varphi(k)}{k} \prod_{n=1}^{n_0-1} \frac{1 - p_n^{-1}}{1 - q_n^{-1}}$$

den, φ Euler-en funtzioa delarik. Baldin $\chi \neq \chi_o$ bada, $F(s,\chi)$ funtzioak ez du puntu singularrik $Re(s) > 0$ planoerdian".

Hauxe ere frogatzen da:

"$F(s,\chi)$ funtzioak, χ k moduludun zertasun bat izanik, $Re(s)>1$ planoerdian Dirichlet-en serie absolutuki konbergentezko adierazpen bat du:

$$F(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{\lambda_n^s} ,$$

non $g(n) = \lambda_n$ funtzio aritmetiko guztiz biderkakorra den eta, p_m delakoak m-garren zenbaki lehena adierazten badu, m zenbaki guztietarako $g(p_m) = q_m$ den".

Azkenez, zera egiaztatzen da: q_n zenbaki osoak, $Re(s) = 0$ zuzenaren ezkerretara $F(s,\chi)$ funtzioa luzatua izan ez dadin aukera daitezke, $F(s,\chi)$ funtzioaren puntu singularren multzoa zuzen horretan dentsoa delarik.

Bukaeran, L-funtzioen aplikazioak ematen dira, funtzio aritmetiko batzuren adierazpen asintotikoen kalkulurako. Hala, IV. atalean, lehenbizi, Ramanujan-en formula bat ororkortzen dugu, L-funtzioetarako. 1916. urtean Ramanujan-ek $Re(s) > 1$ planoerdian ondoko berdintza betetzen dela frogatu zuen:

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d(n))^2}{n^s} ,$$

bertan $\zeta(s)$ delakoa Riemann-en zeta funtzioa eta d(n) funtzio zatitzailea direlarik. Dirichlet-en L-funtzioak kontsideratzen baditugu, $Re(s) > 1$ planoerdian hurrengo adierazpenak egiaztatzen dira:

$$\frac{L(s,\chi)}{L(2s,\chi^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|\ \chi(n)}{n^s} ,$$

$$\frac{L^2(s,\chi)}{L(2s,\chi^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{v(n)}\chi(n)}{n^s} ,$$

non χ k moduludun edozein zertasun eta $\mu(n)$ Mobius-en funtzioa diren eta $v(n)$ delakoak n zenbakiaren faktore lehenen eta desberdinen kopurua adierazten duen. Bi baino berretzaile handiagoko zenbakitzailedun zatiduretarako, Dirichlet-en seriezko adierazpena lortzen dugu ondoko teorema honetan:

"Izan bitez $L(s,\chi)$, k moduludun χ zertasun bati elkartutako Dirichlet-en L-funtzioa, eta q, 2 edo 2 baino handiagoa den zenbaki osoa. Orduan, $Re(s) > 1$ planoerdian hauxe dugu:

$$\frac{L^{q+1}(s,\chi)}{L(2s,\chi^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n)\ a_2(n)\ldots a_{q-2}(n)\ a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{v(n)}\ n^s}\ \chi(n) ,$$

non $a_t(n) = (\alpha_1 + t)(\alpha_2 + t)\ldots.(\alpha_r + t)$ den 1-etik (q-2)-raino aldatzen den t zenbaki osorako, eta

$a'_{q-1}(n) = (2\alpha_1 + q-1)(2\alpha_2 + q-1)\ldots(2\alpha_r + q-1)$ eta $v(n) = r$ diren, n-ren faktore lehenetako konposaketa $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ delarik".

Teorema horretan oinarrituz eta D. Redmond-ek (55) emandako emaitza batez baliatuz, aurreko seriearen koefizienteekiko formula asintotiko bat ateratzen dugu:

"$q \geqslant 2$ zenbaki osorako x infiniturantz doanean, ondoko hau dugu:

$$\sum_{n \leq x} \frac{a_1(n) \ldots a_{q-2}(n)\ a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{v(n)}}\ a_1(n+1) =$$

$$= \frac{6}{q!\,\pi^2} \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{q-1} \right\} x \log^{q+1} x +$$

$$+ O\ (x \log^q x \log \log x)".$$

$\sum_{n \leq x} d(n)^2\, d(n+1)$ baturarako Y. Motohashi-k (43) emandako formula, kasu partikular gisa lortzen da q=3 eginik.

Azkenez, Dirichlet-en serie arrunten propietateak aplikatuz eta $Re(s) > 1$ planoerdian betetzen den

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_k(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^t n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{k,t}(n)}{n^s}$$

berdintzaren arauera, $\Lambda_{k,t}(n)$ funtzio aritmetikoa definitzen da ondoko eraz:

$$\Lambda_{k,t}(n) = \sum_{d|n} \mu_k(d) \log^t \left(\frac{n}{d} \right),$$

bertan k.t zenbaki osoak eta positiboak eta $\mu_k(n)$ Apostol-en funtzioa direlarik. $\Lambda_{k,t}(n)$ funtzioak Mangoldt-ena eta

A. Ivíc-ek (30) definituriko $\Lambda_t(n)$ funtzioa orokortzen ditu; $\Lambda(n) = \Lambda_{1,1}(n)$ eta $\Lambda_t(n) = \Lambda_{1,t}(n)$ direlako.

$\Lambda_{k,t}(n)$ delakoaren funtzio sortzailea,

$$(-1)^t \, \zeta^{(t)}(s) \quad \zeta(s) \quad P_k(s)$$

da, non $\zeta(s)$ Riemann-en zeta funtzioa, $\zeta^{(t)}(s)$ funtzio horren t-garren deribatua, eta

$$P_k(s) = \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^{ks}} + \frac{1}{p^{(k+1)s}}\right)$$

diren.

$\Lambda_{k,t}(n)$ funtziorako ondoko identitatea egiaztatzen dela frogatzen da:

$$\Lambda_{k,t}(n) = \sum_{D|n} \Lambda_{1,t-m}(D) \log^m D \sum_{d|\frac{n}{D}} \mu_k(d) +$$

$$+ \sum_{i=1} \binom{m}{i} \sum_{D|n} \Lambda_{k,i}(D) \, \Lambda_{1,t-m}\left(\frac{n}{D}\right) \log^{m-i}\left(\frac{n}{D}\right),$$

k,t,m zenbaki oso eta positiboak eta m t $<$direlarik.

Modu berean, $\Lambda_{k,t}(n)$ funtzioarekiko batura partzialetarako ondorengo formula asintotikoak frogatzen ditugu:

$$\sum_{n\leq x} \Lambda_{k,t}(n) = P_k \, x \, \frac{\log^{t+1} x}{t+1} + O(x \log^t x),$$

$$\sum_{mn\leq x} \Lambda_{k,r}(m) \, \Lambda_{k,s}(n) = \frac{P_k^2 \, r! \, s!}{(r+s+3)!} \, x \log^{r+s+3} x +$$

$$+ O(x \log^{r+s+2} x),$$

$$\sum_{n\leq x} \Lambda_{1,1}(n)\ \Lambda_{k,t}(n) = x \log^t x + O(x \log^{t-1} x)$$

non $P_k = \prod_p (1-2p^{-k}+p^{-k-1})$ den eta r,s,t,k zenbaki oso eta positiboak diren, $k>1$ izanik.

Gainera, progresio aritmetikoen gaineko $\Lambda_{1,1}(n)\ \Lambda_{k,t}(n)$ biderkaduraren batura partzialerako hurrengo adierazpen asintotikoa lortzen dogu:

"k,t,l,i zenbaki oso eta positiboak, $k>1$ eta $(l,i)=1$ badira, orduan,

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv l \pmod i}} \Lambda_{1,1}(n)\ \Lambda_{k,t}(n) = \frac{x \log^t x}{\varphi(i)} + O(x \log^{t-1} x)$$

dugu, φ Euler-en funtzio aritmetikoa izanik".

I. ATALA

$L(s,\chi)$ FUNTZIOAREN BATEZBESTEKO BALIOAK

Atal honetan Dirichlet-en $L(s,\chi)$ funtzioaren batezbesteko balioa estudiatzen da, T infiniturantz doanean

$$\int_{1}^{T} |L(s,\chi)|^2 \, dt$$

integralaren jokabidea aztertuz, χ k moduludun zertasun ez-nagusi bat eta $Re(s) \geqslant \frac{1}{2}$ direlarik. Lehenbizi, $Re(s) > 1$ planoerdian $L(s,\chi)$ funtzioaren eta beraren berreduren batezbesteko balioei buruzko emaitzak ematen dira. Ondoren, $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian $L(s,\chi)$ funtzioaren batezbesteko balioaren teorema bat frogatzen da. Azkenez, $Re(s) = \frac{1}{2}$ zuzen kritikoan $L(s,\chi)$ funtziorako batezbesteko balioaren teorema bat ematen dugu. Atal hau $L(s,\chi)$ funtzioaren ekuazio funtzional hurbildua aipatuz hasten dugu, hau geroagoko teoremen frogapenetan erabilia izango delarik.

1. EKUAZIO FUNTZIONAL HURBILDUA

$\zeta(s)$-rako ekuazio funtzional hurbildu bat lortzearen arazoa, Riemann-ek berak planteiatu zuen. G.H. Hardy-k eta J. E. Littlewood-ek $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ zerrorako $\zeta(s)$-ren ondoko ekuazio funtzional hurbildua ematen dute:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n \leq y} \frac{1}{n^{1-s}} + O\left(x^{-\sigma}\right) + O\left(y^{\sigma-1} |t|^{\frac{1}{2}-\sigma}\right), \tag{1.1}$$

non $s = \sigma + it$, $x > H > 0$, $y > H > 0$, $2\pi x y = |t|$ diren eta O delakoan inplikaturiko konstanteak H-ren menpean bakarrik dauden.

Dirichlet-en L-funtzioen kasuan, Linnik-ek hurrengo teorema frogatzen du (39) :

1.1 TEOREMA

$c > 0$ konstante egokia eta $\chi(n)$ k moduludun jatorrizko zertasuna badira, orduan:

$$L(s,\chi) = \sum_{n < x} \frac{\chi(n)}{n^s} + \alpha(s,\chi) \sum_{n < y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} + O\left(k^2 (x^{-\sigma}\, y^{\sigma-1}\, t^{\frac{1}{2}-\sigma}) \log t\right), \tag{1.2}$$

non $s = \sigma + it$, $0 \leq \sigma \leq 1$, $|t| > c$, $x > ck$, $y > c$
$2\pi x y = k|t|$ baitira, eta $\alpha(s,\chi)$ ondoko ekuazio funtzionalez definitua baita:

$$L(s,\chi) = \alpha(s,\chi)\; L(1-s,\chi).$$

Gainera, (1.2) formula uniformea da σ, t eta k aldagaietan.

K. Chandrasekharan-ek eta R. Narasimhan-ek (10) zera frogatzen dute: baldintza batzuren menpean,

$$(1.3) \qquad \Delta(s)\, \phi(s) = \Delta(\delta - s)\, \psi(\delta - s)$$

eratako ekuazio funtzional orokor batetik, non

$$\Delta(s) = \prod_{\nu=1}^{N} (\alpha_\nu s + \beta_\nu), \quad \alpha_\nu > 0, \quad \beta_\nu \text{ konplexuak}$$

eta

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n^{-s}$$

planoerdi batetan baitira, ondoko eratako ekuazio funtzional hurbildua ateratzen da:

$$(1.4) \qquad \phi(s) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n \lambda_n^{-s} + \frac{\Delta(\delta - s)}{\Delta(s)} \sum_{\mu_n \leq y} b_n \mu_n^{s-\delta} + R(x,y,|t|).$$

Bereziki, $k > 1$ moduludun χ jatorrizko zertasun ez-nagusi batetarako Dirichlet-en L-funtzioak, $L(s,\chi)$-k, ondoko ekuazio funtzionala betetzen du:

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s,\chi) = \tag{1.5}$$
$$= E(\chi) \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1-s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right) L(1-s,\bar{\chi}) ,$$

non, $\chi(-1)$ berdin 1 edo -1 izatearen arauera, a berdin 0 edo 1 den, eta hurrengo ekuazio funtzional hurbildua ere betetzen du.

1.2 TEOREMA

Izan bedi χ $k > 1$ moduludun jatorrizko zertasun ez-nagusi bat.

$$L(s,\chi) = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} +$$
$$+ E(\chi) \left(\frac{\pi}{k}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} + \tag{1.6}$$
$$+ 0\,(x^{-\sigma}) + 0\,(y^{\sigma-1} |t|^{\frac{1}{2}-\sigma}) ,$$

non $2\pi x y = k\,|t|$, $s = \sigma + it$, $x > M > 0$, $y > M > 0$, $\sigma > 0$ eta $|t| > c$ baitira, c konstante egoki bat izanik.

2. BATEZBESTEKO BALIOAREN TEOREMAK Re(s) > 1 PLANOERDIAN

Azpiatal honetan $Re(s) > 1$ planoerdirako $L(s,\chi)$ funtzioaren berredura osoen batezbesteko balioaren arazoa aztertzen da. Horretarako, Dirichlet-en seriei buruzko teoriaren ondoko emaitza erabiliko dugu:

2.1 LEMA (58)

Izan bitez

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad , \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \quad , \quad (s = \sigma + it)$$

bi serie absolutiki konbergente, $\sigma > \sigma_1$ eta $\sigma > \sigma_2$ planoerdietan errespektiboki. Orduan, $\alpha > \sigma_1$ eta $\beta > \sigma_2$ balioetarako zera dugu:

$$(2.1) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\alpha + it)\, g(\beta - it)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}}$$

Bereziki, $b_n = \bar{a}_n$ eta $\alpha = \beta = \sigma$ hartuz, hauxe ateratzen dugu:

$$(2.2) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} \quad ,$$

$\sigma > \sigma_1$ denean.

Lema horien bidez hurrengo teorema lortzen dugu:

2.1 TEOREMA

Izan bedi χ k moduludun zertasun bat eta $s = \sigma + it$. Orduan, $\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdian ondorengo berdintzak egiaztatzen dira:

$$(2.3)\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^2\, dt = L(2\sigma, \chi_0) \quad ;$$

$$(2.4)\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^{-2}\, dt = \frac{L(2\sigma,\chi_0)}{L(4\sigma, \chi_0)} \quad ;$$

$$(2.5)\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^4\, dt = \frac{L^4(2\sigma,\chi_0)}{L(4\sigma, \chi_0)} \quad ;$$

$$(2.6)\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^{2c}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d_c(n)\right)^2 \chi_0(n)}{n^{2\sigma}} \quad ;$$

$$(2.7)\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} L^{(\mu)}(\alpha + it)\, \bar{L}^{(\nu)}(\beta - it,)\, dt = L^{(\mu+\nu)}(\alpha+\beta, \chi^2)$$

$\alpha, \beta > 1$ balioetarako; non c zenbaki oso eta positibo bat eta χ_0 k moduludun zertasun nagusia diren, $L^{(\mu)}$ $L^{(\nu)}$ eta $L^{(\mu+\nu)}$ ikurrek $L(s,\chi)$ funtzioaren μ- , ν- eta $(\mu+\nu)$-garren deribatuak adierazten dituzten, eta $d_c(n)$ funtzio aritmetikoak n zenbakia c faktoredun biderkadurezko adierazpideen kopurua ematen duen, faktore berberadun baina bestelako ordenatako adierazpideak desberdinak bailiren zenbatuak direlarik. $(d_2(n) = d(n))$.

Frogapena

Zertasunen propietateen arauera hauxe dakigu:

$$|\chi(n)|^2 = \chi(n)\ \bar{\chi}(n) = \chi_o(n) ,$$

χ k moduludun edozein zertasun eta χ_o k moduludun zertasun nagusia direlarik. Beraz, (2.3) formula (2.2) delakoaren ondorioa da.

$L(s,\chi)$ funtziorako Euler-en identitatearen bidez eta $L(s,\chi)^{-1}$ funtzioaren Dirichlet-en seriezko adierazpidearen arauera, $Re(s) > 1$ planoerdian ondoko berdintzak betetzen dira:

$$\frac{1}{L(s,\chi)} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\ \chi(n)}{n^s} ,$$

$f = \chi\mu$ funtzioa biderkakorra baita, eta $f(p) = -\chi(p)$ eta $\alpha > 1$ zenbaki osorako $f(p^\alpha) = 0$ baita.

(2.2) formularen arauera, (2.4) delakoaren ezkerreko atala

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)\ \chi(n)|^2}{n^{2\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)\ \chi_o(n)}{n^{2\sigma}}$$

da. Baina, $Re(s) > 1$ planoerdian hurrengo berdintzak egiaztatzen dira:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)\ \chi_o(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{\chi_o(p)}{p^s}\right) =$$

$$= \prod_p (1 - \chi_o(p)\ p^{-s})^{-1} \prod_p (1 - \chi_o(p)\ p^{-2s}) =$$

$$= \frac{L(s,\chi_o)}{L(2s,\chi_o)} ,$$

eta bereziki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)\ \chi_o(n)}{n^{2\sigma}} = \frac{L(2\sigma,\chi_o)}{L(4\sigma,\chi_o)} .$$

Honelatan, ba, (2.4) betetzen da.

(2.5) formula frogatzeko, (2.2) delakoan f funtziotzat $L^2(s,\chi)$ funtzioa har dezagun; honek, $Re(s) > 1$ planoerdian ondorengo Dirichlet-en seriezko adierazpidea onartzen du:

$$L^2(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \chi(d)\ \chi(\tfrac{n}{d})\ \frac{1}{n^s} ;$$

$\chi(n)$ funtzioa guztiz biderkakorra denez gero, zera dakigu:

$$\sum_{d|n} \chi(d)\ \chi(\tfrac{n}{d}) = \chi(n) \sum_{d|n} 1 = \chi(n)\ d(n) ;$$

beraz,

$$L^2(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)\ \chi(n)}{n^s} \qquad (2.8)$$

da, d(n) funtzio zatitzailea izanik. Bestalde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\chi(n)|^2 \; d(n)^2}{n^{2\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_o(n) \; d(n)^2}{n^{2\sigma}} \; .$$

Re(s) > 1 planoerdian hauxe dugu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_o(n) \; d(n)^2}{n^s} = \prod_p \left\{1 + d(p)^2 \chi_o(p) \; p^{-s} + d(p^2)^2 \chi_o(p^2) p^{-2s} + \ldots\right\}$$

$$= \prod_p \left\{1 + 2^2 \chi_o(p) p^{-s} + 3^2 \chi_o(p^2) \; p^{-2s} + \ldots\right\} =$$

$$= \prod_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \chi_o(p)^n \; p^{-sn} \right) ;$$

eta

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \; \chi_o(p)^n \; p^{-sn} = \frac{1 - \chi_o(p)^2 \; p^{-2s}}{(1 - \chi_o(p) \; p^{-s})^4}$$

denez gero, ondoko hau lortzen dugu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_o(n) \; d(n)^2}{n^s} = \prod_p \frac{1 - \chi_o(p) \; p^{-2s}}{(1 - \chi_o(p) \; p^{-s})^4} =$$

$$= \frac{L^4(s,\chi_o)}{L(2s,\chi_o)} \; . \qquad (2.9)$$

(2.2), (2.8) eta (2.9) kontutan izanik, (2.5) formula ateratzen da.

(2.6) formula frogatzeko (2.2) delakoan f(s) funtziotzat $(L(s,\chi))^c$ funtzioa hartzen dugu, c delakoa zenbaki osoa eta 1 baino handiagoa izanik. (c = 1 kasuan, (2.3) berdintza dugu). $Re(s) > 1$ planoerdian zera dugu:

$$(L(s,\chi))^c = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{\chi(n_1)}{n_1^s} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\chi(n_2)}{n_2^s} \cdots\cdots \sum_{n_c=1}^{\infty} \frac{\chi(n_c)}{n_c^s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n_1 n_2 \cdot\cdot n_c = n} \chi(n_1)\chi(n_2)\ldots\chi(n_c) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \sum_{n_1 n_2 \cdot\cdot n_c = n} 1 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\, d_c(n)}{n^s} \qquad (2.10)$$

Eta, $Re(s) > 1$ planoerdian

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\chi(n)|^2 (d_c(n))^2}{n^{2\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_0(n)\,(d_c(n))^2}{n^{2\sigma}}$$

denez gero, (2.2) formularen arauera (2.6) delakoa ateratzen da.

(2.7) berdintza frogatzeko, ondorengo Dirichlet-en seriezko gapenetan oinarrituko gara:

$$L^{(\mu)}(\alpha+it,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}\,\chi(n)\,\log^{\mu}(n)}{n^{\alpha+it}}$$

$\alpha > 1$ denean, eta

$$L^{(\nu)}(\beta-it,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\,\chi(n)\,\log^{\nu}(n)}{n^{\beta-it}}$$

$\beta > 1$ denean. Orduan, (1.2) formularen arauera, hauxe ateratzen dugu:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} L^{(\mu)}(\alpha+it,\chi)\; L^{(\nu)}(\beta-it,\chi)\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu+\nu}\chi^{2}(n)\,\log^{\mu+\nu}(n)}{n^{\alpha+\beta}} =$$

$$= L^{(\mu+\nu)}(\alpha+\beta,\chi^{2}) \;,$$

eta teorema frogaturik geratzen da.

Dakusagun, $[0,T]$ tarterako aurreko lemaren antzeko bat egiaztatzen dela.

2.2 LEMA

Izan bitez

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \qquad (s = \sigma + it)$$

bi serie absolutuki konbergente, $Re(s) > \sigma_1$ eta $Re(s) > \sigma_2$ planoerdietan hurrenez hurren. Orduan, $\alpha > \sigma_1$ eta $\beta > \sigma_2$ balioetarako ondoko hau betetzen da:

$$(2.11) \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\alpha + it)\, g(\beta - it)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}}$$

Frogapena

Emandako serieak $Re(s) > \sigma_1$ eta $Re(s) > \sigma_2$ planoerdietan hurrenez hurren absolutuki konbergenteak direnez gero, ondoko biderkadura egin dezakegu:

$$f(\alpha + it)\, g(\beta - it) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha+it}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta-it}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m^{\alpha} n^{\beta}} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} .$$

Lortutako serieak absolutiki konbergenteak dira, eta edozein $[0,T]$ zuzenkitan t aldagaiarako uniformeki konbergenteak dira, $T > 0$ izanık; zeren

$$\left| \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m\ b_n}{m^{\alpha}\ n^{\beta}} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_m|}{m^{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^{\beta}} < +\infty$$

baita. Beraz, $[0,T]$ tartean gaiz-gai integra dezakegu; eta T delakoaren artean zatituz zera ateratzen dugu:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{T} \int_0^T f(\alpha + it)\ g\ (\beta - it)\ dt = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\ b_n}{n^{\alpha+\beta}} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m\ b_n}{m^{\alpha}\ n^{\beta}} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt \end{aligned}$$

Bila dezagun eskuineko atalaren integrala.

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt = \frac{1}{T} \frac{e^{iT\log(n/m)} - 1}{i\ \log(n/m)} =$$

$$= \frac{e^{i\frac{T}{2}\log(n/m)} \left(e^{i\frac{T}{2}\log(n/m)} - e^{-i\frac{T}{2}\log(n/m)} \right)}{i\ T\ \log(n/m)} =$$

$$= \left(\cos\left(\frac{T}{2}\log\left(\frac{n}{m}\right)\right) + i\ \mathrm{sen}\left(\frac{T}{2}\log\left(\frac{n}{m}\right)\right) \right) \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{T}{2}\log\frac{n}{m}\right)}{\frac{T}{2}\log\left(\frac{n}{m}\right)} =$$

$$= \frac{\mathrm{sen}\left(T\log\left(\frac{n}{m}\right)\right)}{T\log\left(\frac{n}{m}\right)} + i\ \frac{\mathrm{sen}\ \left(\frac{T}{2}\log\frac{n}{m}\right)}{\frac{T}{2}\log\left(\frac{n}{m}\right)} .$$

Azken adierazpena (2.12) formulan ordezkatuz, ondoko hau lortzen dugu:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\alpha+it)\, g(\beta-it)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}} +$$

$$+ \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m^{\alpha} n^{\beta}} \frac{\sin(T \log(\frac{n}{m})}{T \log(\frac{n}{m})} +$$

$$+ i \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m^{\alpha} n^{\beta}} \frac{-\sin^2(\frac{T}{2}\log(\frac{n}{m}))}{\frac{T}{2}\log(\frac{n}{m})} .$$

Baina T, m, n $(m \neq n)$ delakoen edozein baliotarako

$$\frac{\sin(T \log(\frac{n}{m})}{T \log(\frac{n}{m})} \quad \text{eta} \quad \sin(\frac{T}{2}\log(\frac{n}{m})) \quad \frac{\sin(\frac{T}{2}\log(\frac{n}{m}))}{\frac{T}{2}\log(\frac{n}{m})}$$

adierazpenak bornaturik daude; beraz, serie bikoitzak T delakoa rekiko uniformeki konbergenteak dira. Konbergentzia uniformeaga tik, serie horien limitea hauxe da, T infiniturantz doanean:

$$\lim_{T\to\infty}\left(\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m^{\alpha} n^{\beta}} \frac{\sin(T\log\frac{n}{m})}{T\log\frac{n}{m}} + i \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m^{\alpha} n^{\beta}} \frac{\sin^2(\frac{T}{2}\log\frac{n}{m})}{\frac{T}{2}\log\frac{n}{m}} \right) =$$

$$= \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m^{\alpha} n^{\beta}} \lim_{T\to\infty} \frac{\sin(T\log\frac{n}{m})}{T\log\frac{n}{m}} +$$

$$+ i \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{n^{\alpha} n^{\beta}} \lim_{T\to\infty} \frac{\sin^2(\frac{T}{2}\log\frac{n}{m})}{\frac{T}{2}\log\frac{n}{m}} = 0$$

Honelatan, ba, T infiniturantz doanerako (2.12) berdintzan limiteak hartuz gero, atera egiten da lema. Ondorio gisa, hurrengo korolario hau dugu:

KOROLARIOA

Izan bitez $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ eta $s = \sigma + it$, serie hori $Re(s) > \sigma_1$ planoerdian absolutuki konbergentea delarik. Orduan, planoerdi horretan zera dugu:

$$(2.13) \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(s)|^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}$$

2.2 TEOREMA

Izan bitez χ k moduludun zertasun bat eta $s = \sigma + it$, $Re(s) > 1$ planoerdian ondoko adierazpenak egiaztatzen dira:

$$(2.14) \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L(s,\chi)|^2\, dt = L(2\sigma,\chi_0),$$

$$(2.15) \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L(s,\chi)|^{-2}\, dt = \frac{L(2\sigma,\chi_0)}{L(4\sigma,\chi_0)},$$

$$(2.16) \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L(s,\chi)|^4\, dt = \frac{L^4(2\sigma,\chi_0)}{L(4\sigma,\chi_0)},$$

$$(2.17) \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L(s,\chi)|^{2c}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_c(n))^2\, \chi_0(n)}{n^{2\sigma}},$$

$$(2.18)\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T L^{(\mu)}(\alpha+it,\chi)\; L^{(\nu)}(\beta-it,\chi)\, dt = L^{(\mu+\nu)}(\alpha+\beta,\chi^2),$$

non $\alpha,\beta > 1$, c zenbaki osoa eta positiboa eta χ_o k modulu-dun zertasun nagusia diren.

Frogapenerako, aski da 2.2 lema eta korolarioa kontutan izatea.

3. L(s,χ) FUNTZIOAREN BATEZBESTEKO BALIOAREN TEOREMA, Re(s) > $\frac{1}{2}$ PLANOERDIAN

3.1 LEMA (58)

$\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$ balioetarako hauxe egiaztatzen da:

$$(3.1)\quad \sum_{o<m<n<T}\sum \frac{1}{m^{\sigma} n^{\sigma} \log \frac{n}{m}} = 0\ (T^{2-2\sigma} \log T) \quad ,$$

bornapena $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \sigma_o < 1$ balioetarako uniformea izanik.

3.2 LEMA

$0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$ balioetarako ondoko hau betetzen da:

$$(3.2)\quad \sum_{0<m<n<T}\sum \frac{1}{m^{\sigma} n^{\sigma} \log \frac{n}{m}} = 0\ (T^{2-2\sigma} \log T) \quad ,$$

bornapena $0 \leq \sigma \leq \sigma_0 < \frac{1}{2}$ balioetarako uniformea delarik.

Frogapena

$$\sum\sum_{0<m<n<T} \frac{1}{m^{\sigma} n^{\sigma} \log \frac{n}{m}} = \sum\sum_{0<m<n<T} \frac{(mn)^{\frac{1}{2}}}{(mn)^{\frac{1}{2}+\sigma} \log \frac{n}{m}} <$$

$$< \quad T \sum\sum_{0<m<n<T} \frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}+\sigma} \log \frac{n}{m}} =$$

$$= O\ (T^{2-2\sigma} \log T) \quad ,$$

3.1 lemaren arauera, bornapen hori $0 \leq \sigma \leq \sigma_o < \frac{1}{2}$ balioetarako uniformea izanik; beraz, frogatua dugu lema hau.

3.3 LEMA

$$(3.3) \qquad \sum\sum_{0<m<n<T} \frac{1}{m\ n \log \frac{n}{m}} = O\ (\log^2 T)\ .$$

Frogapena

Izan bedi $\sum^1$ $m < \frac{n}{2}$ desberdintza betetzen duten aldagai-etako batugaien batura eta $\sum^2$ beste batugaien batura.

$m < \frac{n}{2}$ denean $\log \frac{n}{m} > \frac{1}{A}$ dugu, A konstante positibo bat izanik; honelatan, ba,

$$\sum^1 < A \sum\sum_{0<m<n<T} m^{-1}\ n^{-1} < A\ (\sum_{n<T} n^{-1})^2 = O(\log^2 T)$$

$\sum^2$ delakoaren batugaietarako, $m = n - r$ idazten dugu eta $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$ desberdintzak ditugu; beraz,

$$\log \frac{n}{m} = - \log \left(1 - \frac{r}{n}\right) > \frac{r}{n} .$$

Hala eginik, zera ondorioztatzen da:

$$\sum^2 < \sum_{n<T} \sum_{r \leq \frac{n}{2}} \frac{(n-r)^{-1} n^{-1}}{r/n} < \sum_{n<T} 2 n^{-1} \sum_{r \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{r} =$$

$$= O\left(\sum_{n<T} \frac{\log n}{n}\right) = O(\log^2 T) .$$

3.1 TEOREMA

Izan bitez χ k moduludun jatorrizko zertasun bat eta k 1 baino handiagoa den zenbaki osoa. $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian hauxe dugu:

$$(3.4) \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T |L(s,\chi)|^2 \, dt = L(2\sigma, \chi_0) ,$$

$s = \sigma + it$ eta χ_0 k moduludun zertasun nagusia direlarik.

Frogapena

$\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdian hurrengo hau betetzen da:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |L(s,\chi)|^2 \, dt \longrightarrow 0 \quad , \quad T \longrightarrow \infty \quad \text{denean.}$$

Beraz, (2.14) formulatik (3.4) ateratzen da $\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdirako.

Demagun, σ aldagaia $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ tartean dagoela. 1.2 teoremaren arauera, $L(s,\chi)$ funtzioak, χ k moduludun jatorrizko zertasun ez-nagusia delarik, ondoko ekuazio funtzional hurbildua betetzen du:

$$L(s,\chi) = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} + E(\chi) \left(\frac{\pi}{k}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \sum_{n \leq y} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} +$$

$$+ \; O(x^{-\sigma}) + O(y^{\sigma-1} |t|^{\frac{1}{2}-\sigma}) \quad ,$$

non $2\pi x y = k|t|$, $s = \sigma + it$, $x > M > 0$, $y > M > 0$, $\sigma > 0$, $|t| > c$ (c konstante egoki bat izanik),

$$a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{hurrenez hurren } \chi(-1) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \text{balioen arauera,}$$

eta

$$E(\chi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \displaystyle\sum_{r=0}^{k-1} \chi(r) \, e^{\frac{2\pi r}{k} i} & , \ a = 0 \text{ denean} \\ \dfrac{-i}{\sqrt{k}} \displaystyle\sum_{r=0}^{k-1} \chi(r) \, e^{\frac{2\pi r}{k} i} & , \ a = 1 \text{ denean} \end{cases}$$

diren.

Idatz dezagun

$$H(s,\chi) = E(\chi)\ (\tfrac{\pi}{k})^{s-\frac{1}{2}}\ \frac{\Gamma(\frac{1-s+a}{2})}{\Gamma(\frac{s+a}{2})}\ .$$

Izan bitez $x = y = \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}$, $t \geqslant 1$ eta $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$; orduan, $\sigma > \frac{1}{2}$ denean, ondorengo bornapenak ditugu:

$$x^{-\sigma} = O(t^{-\sigma/2}) = O(t^{-1/4}) \quad ,$$

$$y^{\sigma-1}\, t^{\frac{1}{2}-\sigma} = O(t^{-1/4})\ .$$

Hala, $L(s,\chi)$ funtzioaren ekuazio funtzional hurbildua adieraz dezakegu hurrengo eran:

$$L(s,\chi) = \sum_{n \leq x(t)} \frac{\chi(n)}{n^s} + H(s,\chi) \sum_{n \leq x(t)} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} + O(t^{-1/4}) =$$

$$= Z_1 + Z_2 + O(t^{-1/4}).$$

Beraz, hauxe dugu:

$$|L(s,\chi)|^2 = L(s,\chi)\ \overline{L(s,\chi)} =$$

$$(3.5) \qquad = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + O(t^{-\frac{1}{2}}) + Z_1\overline{Z}_2 +$$

$$+ \overline{Z}_1 Z_2 + O(|Z_1|t^{-1/4}) + O(|Z_2|t^{-1/4})\ .$$

(3.4) formula lortzeko (3.5) delakoaren batugai bakoitza 1-etik T-raino integratuko dugu.

$$|z_1|^2 = \sum_{m \le x(t)} \frac{\chi(m)}{m^{\sigma+it}} \sum_{n \le x(t)} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{\sigma-it}} =$$

$$= \sum\sum_{m,n \le x(t)} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(mn)^{\sigma}} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} .$$

$x(t) = \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}$ funtzioa $[1,T]$ tartean gorakorra da,

$x(1) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}}$ izanik; orduan,

$$\int_1^T |z_1|^2\, dt = \int_1^T \sum\sum_{m,n \le x(t)} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(m\,n)^{\sigma}} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt =$$

$$= \sum\sum_{m,n \le x(1)} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(m\,n)^{\sigma}} \int_1^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt +$$

$$+ \int_1^T \sum\sum_{x(1) < \max(m,n) \le x(t)} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(m\,n)^{\sigma}} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt .$$

$x(1) < r \le x(T)$ baldintza betetzen duen r zenbaki oso bakoitzerako, izan bedi $T_1(r)$ zenbaki erreala, non $x(T_1(r)) = r$ den. Orduan,

$$\int_1^T \sum\sum_{x(1) < \max(m,n) = r \le x(t)} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(m\,n)^{\sigma}} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt =$$

$$= \int_{T_1([x(1)]+1)}^{T} \sum\sum_{\max(m,n) = [x(1)]+1} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(m\,n)^{\sigma}} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt +$$

$$+ \int_{T_1([x(1)]+2}^{T} \sum_{\max(m,n)=[x(1)]+2} \sum \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(m\,n)^{\sigma}} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt \; +$$

$$+ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; +$$

$$+ \int_{T_1([x(T)])}^{T} \sum_{\max(m,n)=[x(T)]} \sum \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(m\,n)^{\sigma}} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt \; =$$

$$= \sum_{x(1)<\max(m,n)=r\leq x(t)} \sum \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(m\,n)^{\sigma}} \int_{T_1(r)}^{T} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt.$$

T_1 delakoa $r = \max(m,n)$ zenbaki osoari elkartutako balioa denez, (m,n) bikote bakoitzerako $T_1(m,n)$ definitzen da ondoko eran:

$$\sqrt{\frac{k\, T_1(m,n)}{2\pi}} = \max(m,n) \; ,$$

hau da,

$$T_1(m,n) = \frac{2\pi}{k} \max(m^2, n^2).$$

Gainera, $\chi(n)\,\overline{\chi}(n) = \chi_0(n)$ denez gero, $m = n$ kasuko gaiak besteetatik bereiztuz, zera ondorioztatzen dugu:

$$\int_1^T |Z_1|^2 \, dt = \sum_{n\leq\sqrt{\frac{k}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)}{n^{2\sigma}} (T-1) \; +$$

$$+ \sum_{\substack{m \neq n \\ m,n=\sqrt{\frac{k}{2\pi}}}} \sum \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(m\,n)^{\sigma}} \int_1^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt \; +$$

$$+ \sum_{\sqrt{\frac{k}{2\pi}} < n \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)}{n^{2\sigma}} \quad (T - T_1 \ (n,n)) \quad +$$

$$+ \sum_{\substack{m \neq n \\ \sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m,n) \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \sum \frac{\chi(m)\ \overline{\chi}(n)}{(m\,n)^{\sigma}} \int_{T_1(m,n)}^{T} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt \ =$$

$$= \sum_{n \le \sqrt{\frac{k}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)}{n^{2\sigma}} \ (T - 1) + \sum_{\sqrt{\frac{k}{2\pi}} < n \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)}{n^{2\sigma}} \ (T - T_1(n,n)) \ +$$

$$+ \sum_{\substack{m \neq n \\ m,n \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \sum \ O\left(\frac{1}{(m,n)^{\sigma} \ \left|\log \frac{n}{m}\right|} \right) .$$

3.1 eta 3.3 lemen arauera, $\frac{1}{2} \le \sigma \le 1$ denean,

$$\sum_{0 < m < n < T} \sum \frac{1}{m^{\sigma} n^{\sigma} \log \frac{n}{m}} = O\ (\max\ (T^{2-2\sigma} \log T,\ \log^2 T\ ))$$

bornapena dugu. Beraz,

$$\int_1^T |z_1|^2 \ dt = T\ L(2\sigma,\chi_0) - T \sum_{n > \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)}{n^{2\sigma}} \ -$$

$$- \sum_{n \le \sqrt{\frac{k}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)}{n^{2\sigma}} - \sum_{\sqrt{\frac{k}{2\pi}} < n \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)}{n^{2\sigma}} \ T_1(n,n) \ +$$

$$+ \ O\ (\ \max\ (\ (kT)^{1-\sigma} \log(kT)\ ,\ \log^2(kT)))\ .$$

$\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ denean, hurrengo bornapenak betetzen dira:

$$\sum_{n > \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\chi_o(n)}{n^{2\sigma}} = O\left(T^{\frac{1}{2}-\sigma} \right) ,$$

$$\sum_{\sqrt{\frac{k}{2\pi}} < n \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\chi_o(n)}{n^{2\sigma}} T_1(n,n) = O\left(\sum_{n \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{2\pi n^2}{n^{2\sigma} k} \right) =$$

$$= O\left(T^{3/2-\sigma} \right) .$$

Honelatan, ba,

$$\int_1^T |z_1|^2 \, dt = T\, L(2\sigma, \chi_o) + O\left(T^{3/2-\sigma}\right) \qquad (3.6)$$

lortzen dugu; hau da,

$$\int_1^T |z_1|^2 \, dt \sim T \ L(2\sigma, \chi_o) .$$

Azter dezagun, orain, $|z_2|^2$ funtzioaren 1-etik T-rainoko integrala. Horretarako, lehenbizi, ondoko adierazpena bornatuko dugu:

$$I(T) = \int_1^T \left| \sum_{n \leq x(t)} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} \right|^2 dt =$$

$$= \int_1^T \sum\sum_{m,n \leq x(t)} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(mn)^{1-\sigma}} \left(\frac{n}{m} \right)^{it} dt =$$

$$= \sum_{m,n\leq x(1)}\sum \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(mn)^{1-\sigma}} \int_1^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt \; +$$

$$+ \sum_{x(1) < \max(m,n) \leq x(T)}\sum \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(mn)^{1-\sigma}} \int_{T_1(m,n)}^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt =$$

$$= T \sum_{n\leq\sqrt{\frac{k}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)}{n^{2-2\sigma}} - \sum_{n\leq\sqrt{\frac{k}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)}{n^{2-2\sigma}} \; +$$

$$+ \sum_{\sqrt{\frac{k}{2\pi}} < n \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)}{n^{2-2\sigma}} \left(T - T_1(n,n)\right) \; +$$

$$+ \sum_{\substack{m \neq n \\ m,n\leq\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}}\sum O\left(\frac{1}{(mn)^{1-\sigma}\,\left|\log\frac{n}{m}\right|}\right)$$

$\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ tartean $0 \leq 1-\sigma < \frac{1}{2}$ dugu; beraz, 3.2 lema aplikatuz eta $T_1(n,n) = \frac{2\pi}{k}\, n^2$ dela kontutan izanik, hauxe lortzen da:

$$I(T) = T \sum_{n\leq\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)}{n^{2-2\sigma}} - \sum_{\sqrt{\frac{k}{2\pi}} < n\leq\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\chi_0(n)\; 2\pi n^2}{k\; n^{2-2\sigma}} \; +$$

$$+ \; O\left((kT)^{\sigma} \log (kT)\right) =$$

$$= \; O\left(k^{\sigma-\frac{1}{2}}\, T^{\sigma+\frac{1}{2}}\right) .$$

σ aldagaiaren edozein baliotarako eta t infiniturantz doanerako, (58),

$$|\Gamma(\sigma+it)| \sim e^{-\frac{1}{2}\pi|t|} \quad |t|^{\sigma-\frac{1}{2}} \quad \sqrt{2\pi}$$

dela dakigu, eta baliokidetasun horretatik ondokoa ateratzen da:

$$\left| \frac{\Gamma(\frac{1-s+a}{2})}{\Gamma(\frac{s+a}{2})} \right| \sim \left|\frac{t}{2}\right|^{\frac{1}{2}-\sigma}$$

Beraz,

$$H(s,\chi) = E(\chi) \ (\frac{\pi}{k})^{s-\frac{1}{2}} \ \frac{\Gamma(\frac{1-s+a}{2})}{\Gamma(\frac{s+a}{2})} = 0 \ ((kt)^{\frac{1}{2}-\sigma}) \ .$$

Izan bedi A konstante positibo bat, non $|H(s,\chi)|^2 < A \ (kT)^{1-2\sigma}$ betetzen den. Orduan,

$$\int_1^T |Z_2|^2 \, dt < A \ k^{1-2\sigma} \int_1^T t^{1-2\sigma} \ I'(t)dt =$$

$$= A \ k^{1-2\sigma} \ t^{1-2\sigma} I(t) \Big]_1^T + A \ k^{1-2\sigma}(1-2\sigma) \int_1^T t^{-2\sigma} I(t) \ dt =$$

$$= O \ (\ T^{3/2-\sigma} \ ),$$

hots,

$$(3.7) \qquad \int_1^T |Z_2|^2 \ dt = O(T^{3/2-\sigma}) \ .$$

$$(3.8) \qquad \int_1^T O(t^{-\frac{1}{2}})dt = C \ (T^{\frac{1}{2}}) \ .$$

Schwarz-en desberdintza aplikatuz, (3.5) formulako beste batugaien [1,T] tartearen gaineko integralak borna ditzakegu.

$$\left|\int_1^T z_1\overline{z}_2 dt\right| \leq \int_1^T |z_1||z_2|\, dt \leq$$

$$\leq \left(\int_1^T |z_1|^2\, dt \int_1^T |z_2|^2\, dt\right)^{1/2} =$$

$$= O\left(T^{\frac{5-2\sigma}{4}}\right) \qquad (3.9)$$

Era berean,

$$\int_1^T \overline{z_1} z_2\, dt = O\left(T^{\frac{5-2\sigma}{4}}\right) \qquad (3.10)$$

Bestalde,

$$\int_1^T |z_1||t^{-1/4}|dt = O\left(\left(\int_1^T |z_1|^2\, dt \int_1^T t^{-\frac{1}{2}}\, dt\right)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= O\left(T^{3/4}\right) \qquad (3.11)$$

eta

$$\int_1^T |z_2||t^{-1/4}|dt = O\left(\left(\int_1^T |z_2|^2\, dt \int_1^T t^{-\frac{1}{2}}\, dt\right)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= O\left(T^{1-\sigma/2}\right) \qquad (3.12)$$

(3.5)-etik (3.12)-rainoko adierazpenak kontutan izanik, $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ denean hauxe ondorioztatzen da:

$$\int_1^T |L(s,\chi)|^2\, dt = T\, L(2\sigma,\chi_0) + O\left(T^{\frac{5-2\sigma}{4}}\right) \qquad (3.13)$$

(3.13) adierazpena T delakoaz zatituz, eta T infiniturantz doaneko limiteak hartuz, (3.4) emaitza lortzen da.

4. $L(s,\chi)$ FUNTZIOAREN BATEZBESTEKO BALIOAREN TEOREMA $Re(s) = \frac{1}{2}$ ZUZENEAN.

P. X. Gallagher-ek zera frogatu du k moduludun χ zertasun ez-nagusi batetarako:

$$\int_{-T}^{T} (L(\tfrac{1}{2} + it, \chi)|^2\, dt = O\,((k+T)\log kT)\ , \quad (T \geq 2)\ .$$

Hurrengo teoreman aurreko integralerako berdintza asintotiko bat lortzen dugu, χ jatorrizko zertasun bat izanik.

TEOREMA

Izan bitez χ k moduludun jatorrizko zertasun bat, k zenbaki osoa, 1 baino handiagoa dena, eta φ Euler-en funtzioa. Orduan, ondoko hau betetzen da:

$$(4.1) \quad \int_2^T |L(\tfrac{1}{2} + it,\chi)|^2\, dt = \frac{\varphi(k)}{k}\, T \log kT + O\left(T \log^{3/4} kT\right)\ .$$

Frogapena

Teorema hau frogatzeko, 1.2 teoreman emandako $L(s,\chi)$ funtzioaren ekuazio funtzional hurbildua erabiliko dugu.

Idatz dezagun

$$H(s,\chi) = E(\chi) \left(\frac{\pi}{k}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} .$$

Ekuazio funtzional hurbilduan, $\sigma = \frac{1}{2}$, $t > 2$, $y = \sqrt{\log t}$ eta $x = \dfrac{kt}{2\pi\sqrt{\log t}}$ hartzen ditugu. $H(\frac{1}{2} + it,\chi) = O(1)$ denez, ondoko berdintzak ondorioztatzen ditugu:

$$L\left(\frac{1}{2} + it,\chi\right) = \sum_{n \leq x(t)} n^{-\frac{1}{2}-it}\chi(n) + O\left(\sum_{n \leq y(t)} n^{-\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ O\left(\left(\frac{t}{\sqrt{\log t}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) + O\left(\left(\sqrt{\log t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \sum_{n \leq x(t)} \frac{\chi(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} + O(\log^{1/4} t) =:$$

$$= Z + O(\log^{1/4} t) . \tag{4.2}$$

Beraz,

$$\left|L\left(\frac{1}{2} + it,\chi\right)\right|^2 = |Z|^2 + O(|Z| \log^{1/4} t) + O(\log^{\frac{1}{2}} t) . \tag{4.3}$$

Bila dezagun banan-banan (4.3) baturaren batugai bakoitzaren [2,T] tartearen gaineko integrala.

$$\int_2^T |z|^2\, dt = \int_2^T \sum_{m \le x(t)} \frac{\chi(m)}{m^{\frac{1}{2}+it}} \sum_{n \le x(t)} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{\frac{1}{2}-it}}\, dt =$$

$$= \int_2^T \sum\sum_{m,n \le x(t)} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt.$$

$x(t) = \dfrac{k\,t}{2\pi\sqrt{\log t}}$ funtzioa gorakorra da $[2,T]$ tartean.

$$\int_2^T |z|^2\, dt = \sum\sum_{m,n \le x(2)} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}} \int_2^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt +$$

$$+ \int_2^T \sum\sum_{x(2) < \max(m,n) \le x(t)} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt =$$

$$= \sum\sum_{m,n \le x(2)} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}} \int_2^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt +$$

$$+ \sum\sum_{x(2) < \max(m,n) \le x(T)} \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}} \int_{T_1(m,n)}^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt ,$$

$T_1(m,n)$ delakoa $x(T_1(m,n) = \max(m,n)$ baldintza betetzen duen zenbaki erreala delarik, hau da,

$$\frac{k\quad T_1(m,n)}{2\pi\sqrt{\log(T_1(m,n))}} = \max(m,n) .$$

Honelatan, ba, χ_0 k moduludun zertasun nagusia bada, hauxe dugu:

$$\int_2^T |z|^2\,dt = \sum_{n\le x(2)} \frac{\chi_o(n)}{n}(T-2) +$$

$$+ \sum_{\substack{m\neq n \\ m,n\le x(2)}}\sum \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}} \int_2^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt +$$

$$+ \sum_{x(2)<n\le x(T)} \frac{\chi_o(n)}{n}(T - T_1(n,n)) +$$

$$+ \sum_{\substack{m\neq n \\ x(2)<\max(m,n)\le x(T)}}\sum \frac{\chi(m)\,\overline{\chi}(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}} \int_{T_1(m,n)}^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt =$$

$$= T\sum_{n\le x(T)} \frac{\chi_o(n)}{n} - 2\sum_{n\le x(2)} \frac{\chi_o(n)}{n} -$$

$$(4.4)\qquad - \sum_{x(2)<n\le x(T)} \frac{\chi_o(n)}{n} T_1(n,n) + \sum_{\substack{m\neq n \\ m,n\le x(T)}}\sum O\left(\frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}}\left|\log\frac{n}{m}\right|}\right)$$

Azter dezagun (4.4) baturaren batugai bakoitza. $x>0$ denean ondoko hau egiaztatzen da:

$$\sum_{n\le x}\chi_o(n) = \sum_{\substack{n\le x \\ (n,k)=1}} 1 = \sum_{n=1}^{[x]} \left[\frac{1}{(n,k)}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{[x]} \sum_{\substack{d|n \\ d|k}} \mu(d) = \sum_{d|k} \sum_{q=1}^{[x/d]} \mu(d) =$$

$$= \sum_{d|k} \mu(d) \sum_{q=1}^{[x/d]} 1 = \sum_{d|k} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right] =$$

$$= \sum_{d|k} \mu(d) \left(\frac{x}{d} - \left\{\frac{x}{d}\right\} \right) =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k} x + O(k^{\varepsilon}) ,$$

non ε edozein zenbaki erreal positibo eta φ Euler-en funtzioa diren. Emaitza hori eta Abel-en batuketa-formula kontutan izanik, (4.4) baturaren lehenengo batugairako adierazpen asintotiko bat bilatuko dugu.

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi_0(n)}{n} = \left(\sum_{n \leq x} \chi_0(n)\right) \frac{1}{x} + \int_1^x \left(\sum_{n \leq u} \chi_0(n)\right) \frac{du}{u^2} =$$

$$= \left(x \frac{\varphi(k)}{k} + O(k^{\varepsilon})\right) \frac{1}{x} + \int_1^x \left(u \frac{\varphi(k)}{k} + O(k^{\varepsilon})\right) \frac{du}{u^2} =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k} \log x + O(1) .$$

Beraz, $x(T) = \dfrac{kT}{2\pi \sqrt{\log T}}$ funtziorako zera dugu:

$$\sum_{n \leq x(T)} \frac{\chi_0(n)}{n} = \frac{\varphi(k)}{k} \log kT + O\left(\frac{\varphi(k)}{k} \log \log T\right) . \quad (4.5)$$

Aurki dezagun adierazpen asintotiko bat (4.4) baturaren hirugarren batugairako.

$n = \dfrac{k\ T_1(n,n)}{2\pi \sqrt{\log T_1(n,n)}}$ denez gero, $\dfrac{T_1(n,n)}{n} = \dfrac{2\pi}{k} \sqrt{\log T_1(n,n)}$

dugu; honelatan, ba,

$$\sum_{n\leq x(T)} \frac{T_1(n,n)}{n} = O\left(\sum_{n\leq x(T)} \frac{\sqrt{\log\ T_1(n,n)}}{k}\right) =$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{\log T}}{k} \sum_{n\leq x(T)} 1\right) = O(T)\ .$$

Hala, hurrengo hau ateratzen dugu:

$$\sum_{x(2)<n\leq x(T)} \frac{\chi_0(n)}{n}\ T_1(n,n) = O\left(\sum_{n\leq x(T)} \frac{T_1(n,n)}{n}\right) =$$

$$= O(T)\ . \qquad (4.6)\ .$$

Azkenez, 3.1 lema aplikatuz, ondorengo emaitza lortzen dugu:

$$\sum_{\substack{m\neq n \\ m,n\leq x(T)}}\sum O\left(\frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}}\left|\log \frac{n}{m}\right|}\right) =$$

$$= O\left(\frac{kT}{\sqrt{\log T}}\ \log \frac{kT}{2\pi\sqrt{\log T}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{kT\ \log\ kT}{\sqrt{\log T}}\right)\ . \qquad (4.7)$$

(4.5), (4.6) eta (4.7) adierazpenetatik ondoko formula ondorioztatzen da:

$$\int_2^T |z|^2\, dt = \frac{\varphi(k)}{k}\, T \log kT + O\left(\frac{\varphi(k)}{k}\, T \log\log T\right) +$$

$$+ O\left(\frac{kT \log kT}{\sqrt{\log T}}\right) =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k}\, T \log kT + O\left(\frac{kT \log kT}{\sqrt{\log T}}\right) \qquad (4.8)$$

Bestalde, zera dakigu:

$$\int_2^T \log^{\frac{1}{2}} t\, dt = O(T\sqrt{\log T}) \; . \qquad (4.9)$$

Integraletarako Schwarz-ek ematen duen desberdintzaren bidez, hurrengo emaitza lortzen dugu:

$$\int_2^T |z| \log^{1/4} t\, dt \leq \left(\int_2^T |z|^2 dt \int_2^T \log^{\frac{1}{2}} t\, dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O\left(\left(\frac{\varphi(k)}{k}\, T \log kT\right)^{\frac{1}{2}}\right) . \; O\left((T\sqrt{\log T})^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= O\left(\sqrt{\frac{\varphi(k)}{k}} \cdot T \log^{3/4} kT\right) . \qquad (4.10)$$

(4.3) adierazpena eta (4.8), (4,9 eta (4.10) emaitzak kontuan izanik, teorema berehala ondorioztatzen da.

II. ATALA

$L(s,\chi)$ FUNTZIOAREN BERREDUREN BATEZBESTEKO BALIOAK

Atal honetan $L(s,\chi)$ funtzioaren batezbesteko balioa azter tzen da, lehenbizi, $|L(s,\chi)|$ funtzioaren laugarren berredurarako $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian eta, gero, 2c berretzailedun berredurarako $Re(s) > 1 - \frac{1}{c}$ planoerdian. Kasu bietan $c > 2$ zenbaki osoa eta χ k moduludun jatorrizko zertasun bat direlarik. Gainera, $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian $L(s,\chi)$ funtzioaren berredura errealetarako batezbesteko balioaren teorema bat lortzen da.

1. $L(s,\chi)$ FUNTZIOAREN BERREDURA OSOEN BATEZBESTEKO BALIOAREN TEOREMAK.

1.1 TEOREMA

Izan bitez χ k moduludun jatorrizko zertasuna, k zenbaki osoa 1 baino handiagoa, eta χ_0 k moduludun zertasun nagusia. Orduan, $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian zera dugu:

$$(1.1) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T |L(s,\chi)|^4 \, dt = \frac{L^4(2\sigma, \chi_0)}{L(4\sigma, \chi_0)},$$

$s = \sigma + it$ izanik.

Frogapena

$Re(s) > 1$ planoerdian hauxe dugu:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^1 |L(s,\chi)|^4 \, dt = 0 .$$

Beraz, aurreko atalaren (2.16) formulatik (1.1) emaitza ondorioztatzen dugu $Re(s) > 1$ planoerdirako.

Demagun σ aldagaia $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ tartekoa dela. Aurreko 1.2 teoremaren arauera, $L(s,\chi)$ funtzioak ondoko ekuazio funtzional hurbildua egiaztatzen du:

$$L(s,\chi) = \sum_{n\leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} + E(\chi)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \sum_{n\leq y} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} +$$

$$+ O(x^{-\sigma}) + O(y^{\sigma-1} |t|^{\frac{1}{2}-\sigma}),$$

non $2\pi xy = k|t|$, $s = \sigma + it$, $x > M > 0$, $y > M > 0$, $\sigma > 0$, $|t| > c$ (c konstante egoki bat izanik),

$$a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{errespektiboki} \qquad \chi(-1) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad \text{balioen arauera,}$$

eta

$$E(\chi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \displaystyle\sum_{r=0}^{k-1} \chi(r) e^{\frac{2\pi r}{k} i} , & a = 0 \text{ denean ,} \\ \dfrac{-i}{\sqrt{k}} \displaystyle\sum_{r=0}^{k-1} \chi(r) e^{\frac{2\pi r}{k} i} , & a = 1 \text{ denean ,} \end{cases}$$

diren.

Idatz dezagun

$$H(s,\chi) = E(\chi)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} .$$

Izan bitez $x = y = \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}$, $t \geq 1$ eta $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$. Baldintza hauetan, hurrengo eran adieraz dezakegu $L(s, \chi)$ funtzioaren ekuazio funtzional hurbildua:

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leq x(t)} \frac{\chi(n)}{n^s} + H(s,\chi) \sum_{n \leq x(t)} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} +$$

$$+ O(t^{-\frac{1}{4}}) =$$

$$= Z_1 + Z_2 + O(t^{-\frac{1}{4}}) .$$

Honelatan, ba, ondorengo hau dugu:

$$|L(s,\chi)|^4 = (|z_1|^2 + |z_2|^2 + O(t^{-\frac{1}{2}}) + O(|z_1||z_2|) + $$
$$+ O(|z_1|\ t^{-\frac{1}{4}}) + O(|z_2|\ t^{-\frac{1}{4}}))^2 =$$
$$= |z_1|^4 + |z_2|^4 + O(t^{-1}) + O(|z_1|^2\ |z_2|^2) +$$
$$+ O(|z_1|^2\ t^{-\frac{1}{2}}) + O(|z_2|^2\ t^{-\frac{1}{2}}) + O(|z_1|^3\ t^{-\frac{1}{4}}) +$$
$$+ O(|z_1|^2\ |z_2|\ t^{-\frac{1}{4}}) + O(|z_1|^3\ |z_2|) + \tag{1.2}$$
$$+ O(|z_2|^3\ |z_1|) + O(|z_2|^2\ |z_1|\ t^{-\frac{1}{4}}) + O(|z_2|^3\ t^{-\frac{1}{4}}) +$$
$$+ O(|z_1||z_2|\ t^{-\frac{1}{2}}) + O(|z_1|\ t^{-3/4}) + O(|z_2|\ t^{-3/4}) .$$

Hala, (1.1) lortzeko, (1.2) baturaren batugai bakoitza 1-etik T-raino integratuko dugu. Horretarako, kalkula dezagun $|z_1|^4$ esplizituki:

$$|z_1|^4 = \sum_{m\le x(t)} \frac{\chi(m)}{m^{\sigma+it}} \sum_{n\le x(t)} \frac{\chi(n)}{n^{\sigma+it}} \sum_{u\le x(t)} \frac{\overline{\chi}(u)}{u^{\sigma-it}} \sum_{v\le x(t)} \frac{\overline{\chi}(v)}{v^{\sigma-it}} =$$

$$= \sum\sum\sum\sum_{m,n,u,v\le x(t)} \frac{\chi(mn)\ \overline{\chi}(uv)}{(m\ n\ u\ v)^{\sigma}} \left(\frac{uv}{mn}\right)^{it} ,$$

non aldagai bakoitzak $\left[1, \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}\right]$ tarteko balioak hartzen dituen, hartzen dituen, $x(t) = \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}$ funtzioa [1, T] tartean gorakorra delarik. Adierazpen hori integratuz, hauxe lortzen dugu:

$$\int_1^T |z_1|^4\ dt = \int_1^T \sum\sum\sum\sum_{m,n,u,v\le x(1)} \frac{\chi(mn)\ \overline{\chi}(uv)}{(m\ n\ u\ v)^{\sigma}} \left(\frac{uv}{mn}\right)^{it} dt +$$

$$+\int_1^T \sum\sum\sum\sum_{x(1)<\max(m,n,u,v)\leq x(t)} \frac{\chi(mn)\,\overline{\chi}(uv)}{(m\ n\ u\ v)^{\sigma}} \left(\frac{uv}{mn}\right)^{it} dt \ ,$$

(m,n,u,v) laukote bakoitzerako, izan bedi $T_1(m,n,u,v)$ zenbaki erreal bat non

$$x\left(T_1(m,n,u,v)\right) = \sqrt{\frac{k\ T_1(m,n,u,v)}{2\pi}} = \max\ (m,n,u,v)$$

den; hau da,

$$T_1(m,n,u,v) = \frac{2\pi}{k} \max(m^2,n^2,u^2,v^2) \ .$$

Hala, ondoko berdintzak idatz ditzakegu:

$$\int_1^T |Z_1|^4 dt = \sum\sum\sum\sum_{m,n,u,v\leq\sqrt{\frac{k}{2\pi}}} \frac{\chi(mn)\,\overline{\chi}(uv)}{(m\ n\ u\ v)^{\sigma}} \int_1^T \left(\frac{uv}{mn}\right)^{it} dt \ +$$

$$+\sum\sum\sum\sum_{\sqrt{\frac{k}{2\pi}}<\max(m,n,u,v)\leq\sqrt{\frac{kt}{2\pi}}} \frac{\chi(mn)\,\overline{\chi}(uv)}{(m\ n\ u\ v)^{\sigma}} \int_{T_1(m,n,u,v)}^T \left(\frac{uv}{mn}\right)^{it} dt =$$

$$= \sum\sum\sum\sum_{\substack{mn=uv \\ m,n,u,v\leq\sqrt{\frac{k}{2\pi}}}} \frac{\chi_0(mn)}{(mn)^{2\sigma}} \ (T-1) \ +$$

$$+ \sum\sum\sum\sum_{\substack{mn\neq uv \\ m,n,u,v\leq\sqrt{\frac{k}{2\pi}}}} \frac{\chi(mn)\,\overline{\chi}(uv)}{(m\ n\ u\ v)^{\sigma}} \int_1^T \left(\frac{uv}{mn}\right)^{it} dt \ +$$

$$+ \sum\sum\sum\sum_{\substack{mn=uv \\ \sqrt{\frac{k}{2\pi}}<\max(m,n,u,v)\leq\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \frac{\chi_0(mn)}{(mn)^{2\sigma}} \ (T - T_1(m,n,u,v))+$$

$$+ \sum_{\substack{mn \neq uv \\ \sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m,n,u,v) \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \sum \sum \sum \frac{\chi(mn)\, \overline{\chi}(uv)}{(m\ n\ u\ v)^{\sigma}} \int_{T_1(m,n,u,v)}^{T} \left(\frac{uv}{mn}\right)^{it} dt =$$

$$= T \sum_{\substack{mn=uv \\ m,n,u,v \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \sum \sum \sum \frac{\chi_0(mn)}{(mn)^{2\sigma}} - \sum_{\substack{mn=uv \\ m,n,u,v \leq \sqrt{\frac{k}{2\pi}}}} \sum \sum \sum \frac{\chi_0(mn)}{(mn)^{2\sigma}} -$$

$$- \sum_{\substack{mn=uv \\ \sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m,n,u,v) \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \sum \sum \sum \frac{\chi_0(mn)}{(mn)^{2\sigma}} T_1(m,n,u,v) + \qquad (1.3)$$

$$+ \sum_{\substack{mn \neq uv \\ m,n,u,v \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \sum \sum \sum O\left(\frac{1}{(m\ n\ u\ v)^{\sigma} \quad \left|\log \frac{uv}{mn}\right|} \right) .$$

Baldin $1 \leq r \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}$ bada, $mn = uv = r$ ekuazioen emaitza diren (m,n,u,v) laukoteen kopurua $\left(d(r)\right)^2$ da, eta baldin $\sqrt{\frac{kT}{2\pi}} < r \leq \frac{kT}{2\pi}$ bada, ekuazio horien emaitzen kopurua $\left(d(r)\right)^2$ baino txikiagoa da, $d(r)$ funtzio zatitzailea delarik. Beraz,

$$\sum_{\substack{mn=uv \\ m,n,u,v \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \sum \sum \sum \frac{\chi_0(mn)}{(mn)^{2\sigma}} = \sum_{r \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\left(d(r)\right)^2 \quad \chi_0(r)}{r^{2\sigma}} +$$

$$+ O\left(\sum_{\sqrt{\frac{kT}{2\pi}} < r \leq \frac{kT}{2\pi}} \frac{\left(d(r)\right)^2 \ \chi_0(r)}{r^{2\sigma}} \right) .$$

Emandako edozein ε zenbaki erreal positibotarako $d(r) = O(r^{\varepsilon})$ denez,

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(d(r))^2 \; \chi_o(r)}{r^{2\sigma}}$$

seriea $\sigma > \frac{1}{2}$ balioetarako konbergentea da, eta, beraz,

$$\sum_{r > \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{(d(r))^2 \; \chi_o(r)}{r^{2\sigma}} = o(1)$$

da $\sigma > \frac{1}{2}$ denean. Gainera, $Re(s) > 1$ planoerdian zera dugu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d(n)\right)^2 \; \chi_o(n)}{n^s} = \frac{L^4(s, \chi_o)}{L(2s, \chi_o)} \quad .$$

Horren ondorioz, ondoko emaitza ateratzen da:

$$T \sum\sum\sum\sum_{\substack{mn=uv \\ m,n,u,v \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \frac{\chi_o'(mn)}{(mn)^{2\sigma}} = T \, \frac{L^4(2\sigma, \chi_o)}{L(4\sigma, \chi_o)} -$$

$$- T \sum_{r > \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\left(d(r)\right)^2 \; \chi_o(r)}{r^{2\sigma}} + O\left(T \sum_{\sqrt{\frac{kT}{2\pi}} < r \leq \frac{kT}{2\pi}} \frac{\left(d(r)\right)^2 \chi_o(r)}{r^{2\sigma}} \right)$$

$$= T \, \frac{L^4(2\sigma, \chi_o)}{L(4\sigma, \chi_o)} + O\left(T \sum_{r > \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{(d(r))^2 \; \chi_o(r)}{r^{2\sigma}} \right) =$$

$$= T \, \frac{L^4(2\sigma, \chi_o)}{L(4\sigma, \chi_o)} + O(T^{3/2-\sigma+\varepsilon}) \; . \qquad (1.4)$$

(1.3) baturaren bigarren batugaia konstante bat da. Bestalde, (1.3) delakoaren hirugarren batura laukoitzerako, hurrengo borna pena lortzen dugu $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ denean:

$$\sum_{\substack{mn=uv \\ \sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m,n,u,v) \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \sum\sum\sum \frac{\chi_o(mn)}{(mn)^{2\sigma}} T_1(m,n,u,v) <$$

$$< \frac{2\pi}{k} \sum_{\substack{mn=uv \\ m,n,u,v \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \sum\sum\sum \frac{\chi_o(mn)\ (m^2+n^2+u^2+v^2)}{(m\ n\ u\ v)^{\sigma}} =$$

$$= \frac{8\pi}{k} \sum_{\substack{mn=uv \\ m,n,u,v \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \sum\sum\sum \frac{\chi_o(mn)\ m^2}{(m\ n\ u\ v)^{\sigma}} \leq$$

$$\leq \frac{8\pi}{k} \sum\sum_{m,n=\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{m^2\ d(mn)}{(mn)^{2\sigma}} =$$

$$= O\left(\frac{(kT)^{\varepsilon}}{k} \sum_{m \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} m^{2-2\sigma} \sum_{n \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} n^{-2\sigma} \right) =$$

$$= O(T^{3/2-\sigma+\varepsilon}) . \tag{1.5}$$

Azter dezagun (1.3) delakoaren azken batugala:

$$\sum_{\substack{mn \neq uv \\ m,n,u,v = \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \sum\sum\sum O\left(\frac{1}{(m\ n\ u\ v)^{\sigma}\ \left|\log \frac{uv}{mn}\right|} \right) =$$

$$= \sum_{\substack{q \neq r \\ q,r \leq \frac{kT}{2\pi}}} \sum O\left(\frac{d(q)\ d(r)}{(q\,r)^{\sigma}\ \left|\log \frac{r}{q}\right|} \right) =$$

$$= O\left(\sum\sum_{o < q < r = \frac{kT}{2\pi}} \frac{d(q)\ d(r)}{(q\,r)^{\sigma}\ \left|\log \frac{r}{q}\right|} \right) =$$

$$= O\left((k\,T)^{\varepsilon} \sum\sum_{0 < q < r \leq \frac{kT}{2\pi}} \frac{1}{(q\,r)^{\sigma} \;\left|\log \frac{r}{q}\right|} \right) =$$

(1.6)
$$= O\left((k\,T)^{\varepsilon} \quad \max \left\{ (k\,T)^{2-2\sigma} \log(k\,T),\; \log^{2}(k\,T) \right\} \right) \quad ,$$

aurreko atalaren (3.1) eta (3.3) lemen arauera, ε edozein zenbaki erreal positibo delarik. $2-2\sigma < 1$ denez eta edozein zenbaki erreal positibotarako $\log T = O(T^{\delta})$ betetzen denez, (1.3), (1.4), (1.5) eta (1.6) formuletatik $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ denean hauxe ondorioztatzen da:

$$\int_{1}^{T} |Z_1|^4 \; dt = T \frac{L^4(2\sigma,\; \chi_0)}{L(4\sigma,\; \chi_0)} + O(T^{3/2-\sigma+\varepsilon}). \qquad (1.7)$$

Har dezagun, orain, ondoko gai hau:

$$Z_2 = H(s, \chi) \sum_{n \leq x(t)} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} \; .$$

σ delakoaren edozein baliotarako eta t infiniturantz doanerako

$$H(s, \chi) = O((k\;|t|)^{\frac{1}{2}-\sigma})$$

dela dekigu, eta izan bedi A konstante positiboa non

$$|H(s, \chi)|^4 < A(k\;|t|)^{2-4\sigma}$$

den. Beraz, $\int_{1}^{T} |Z_2|^4 \; dt$ kalkulatzeko, $\left| \sum_{n \leq x(t)} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} \right|^4$ adierazpenaren $[1, T]$ tartearen gaineko integralen bornapena lortu behar dugu:

$$I(T) = \int_1^T \Big| \sum_{n\leq \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}} \frac{\overline{\chi(n)}}{n^{1-s}} \Big|^4 dt =$$

$$= \int_1^T \sum\sum\sum\sum_{m,n,u,v\leq \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}} \frac{\chi(mn)\,\overline{\chi}(uv)}{(m\;n\;u\;v)^{1-\sigma}} \left(\frac{uv}{mn}\right)^{it} dt =$$

$$= \sum\sum\sum\sum_{m,n,u,v= \sqrt{\frac{k}{2\pi}}} \frac{\chi(mn)\,\overline{\chi}(uv)}{(m\;n\;u\;v)^{1-\sigma}} \int_1^T \left(\frac{uv}{mn}\right)^{it} dt +$$

$$+ \sum\sum\sum\sum_{\sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m,n,u,v)\leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\chi(mn)\,\overline{\chi}(uv)}{(m\;n\;u\;v)^{1-\sigma}} \int_{T_1(m,n,u,v)}^T \left(\frac{uv}{mn}\right)^{it} dt =$$

$$= T \sum\sum\sum\sum_{\substack{mn=uv \\ m,n,u,v= \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \frac{\chi_o(mn)}{(mn)^{2-2\sigma}} -$$

$$- \sum\sum\sum\sum_{\substack{mn=uv \\ m,n,u,v\leq \sqrt{\frac{k}{2\pi}}}} \frac{\chi_o(mn)}{(mn)^{2-2\sigma}} -$$

(1.8)
$$- \sum\sum\sum\sum_{\substack{mn=uv \\ \sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m,n,u,v)\leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \frac{\chi_o(mn)}{(mn)^{2-2\sigma}} T_1(m,n,u,v) +$$

$$+ \sum\sum\sum\sum_{\substack{mn\neq uv \\ m,n,u,v\leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} O\left(\frac{1}{(m\;n\;u\;v)^{1-\sigma}\;\left|\log \frac{uv}{mn}\right|} \right) .$$

Azter dezagun (1.8) baturaren batugai bakoitza:

$$\sum_{\substack{mn=uv \\ m,n,u,v\le\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}}\sum\sum\sum \frac{\chi_0(mn)}{(mn)^{2-2\sigma}} \le \sum_{r\le\frac{kT}{2\pi}} \frac{\left(d(r)\right)^2 \ \chi_0(r)}{r^{2-2\sigma}} =$$

$$= O((kT)^{2\sigma-1+\varepsilon}) \quad .$$

$T_1(m,n,u,v) = \frac{2\pi}{k}\max(m^2,n^2,u^2,v^2)$ denez eta aldagai guztiak $\left[1, \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}\right]$ tartean aldatzen direnez, hirugarren batugaia ondoko eran borna dezakegu:

$$\sum_{\substack{mn=uv \\ \sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m,n,u,v)\le\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}}\sum\sum\sum \frac{\chi_0(mn)\ T_1(m,n,u,v)}{(mn)^{2-2\sigma}} <$$

$$< 8\pi\sum\sum_{mn\le\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{m^2\ d(mn)}{(mn)^{2-2\sigma}} =$$

$$= O\left((kT)^{\varepsilon}\sum_{n\le\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} n^{-2+2\sigma}\sum_{m\le\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} m^{2\sigma}\right) =$$

$$= O((kT)^{2\sigma+\varepsilon}) \quad .$$

(1.8) adierazpenaren hondarrerako hauxe ondorioztatzen da:

$$\sum_{\substack{mn\ne uv \\ m,n,u,v\le\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}}\sum\sum\sum O\left(\frac{1}{(m\ n\ u\ v)^{1-\sigma}\ \ |\log\frac{uv}{mn}|}\right) =$$

$$= O\left(\sum_{\substack{q\ne r \\ q,r\le\frac{kT}{2\pi}}}\sum \frac{d(r)\ d(q)}{(rq)^{1-\sigma}\ \ |\log\frac{r}{q}|}\right) =$$

$$= O\left((kT)^{\varepsilon} \quad (kT)^{2\sigma} \quad \log(kT)\right) =$$

$$= O((kT)^{2\sigma+\varepsilon}) ,$$

(3.2) lemaren arauera.

Beraz, zera dugu:

$$I(T) = O((kT)^{2\sigma+\varepsilon}) \quad . \tag{1.9}$$

Orduan,

$$\int_1^T |Z_2|^4 \, dt = \int_1^T \left| H(s,\chi) \sum_{n \leq \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} \right|^4 dt <$$

$$< A \int_1^T (kt)^{2-4\sigma} \quad I'(t) \, dt =$$

$$= A \left[(kt)^{2-4\sigma} \quad I(t) \right]_1^T + A(4\sigma-2) \; k^{2-4\sigma} \int_1^T t^{1-4\sigma} \quad I(t) dt =$$

$$= O((kT)^{2-2\sigma+\varepsilon}) \quad , \tag{1.10}$$

ε edozein konstante erreal positibo delarik. Hala, ε behar den bezain tzikia kontsidera daiteke, $2 - 2\sigma + \varepsilon$ adierazpena 1 baino txikiagoa izan dadin, σ delakoa $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ delarik.

Bestalde,

$$\int_1^T t^{-1} \, dt = O(\log T) \tag{1.11}$$

dugu.

(1.2) baturaren batugaiak, zeintzuen integralak ez ditugun orain-dik aztertu, ondoko eratakoak dira:

$$O(|Z_1|^{\alpha} \; |Z_2|^{\beta} \; t^{-\gamma/4}) \; ,$$

non α, β, γ zenbaki osoak eta ez-negatiboak diren, $\alpha + \beta + \gamma = 4$ eta hauetariko bat gehienez nulua izanik. Kalku-la ditzagun batugai horien $[1, T]$ tartearen gaineko integralak Hölder-en desberdintza erabiliz. α, β, $\gamma > 0$ ditutzen batugaietarako, ondoko hau dugu:

$$\int_1^T |Z_1|^{\alpha} \; |Z_2|^{\beta} \; (t^{-1/4})^{\gamma} \; dt = \int_1^T (|Z_1|^4)^{\alpha/4} (|Z_2|^4)^{\beta/4} (t^{-1})^{\gamma/4} dt <$$

$$< \left(\int_1^T |Z_1|^4 dt\right)^{\alpha/4} \left(\int_1^T |Z_2|^4 dt\right)^{\beta/4} \left(\int_1^T (t^{-1}) \; dt\right)^{\gamma/4} =$$

$$= O\left(k^{\frac{\beta}{4}(2-2\sigma+\varepsilon)} \; T^{\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{4}(2-2\sigma+\varepsilon)} \; \log^{\gamma/4} T\right) =$$

$$= o_k(T) \; , \qquad (1.12)$$

zeren $\alpha + \beta + \gamma = 4$ baita, ε delakoa $2 - 2\sigma + \varepsilon < 1$ izan dadin, behar den bezain txikia kontsidera baitaiteke, eta $\log T = O(T^{\delta})$ baita, δ edozein zenbaki erreal positibo delarik.

Baldin (1.2) baturan kontsideraturiko batugaian α, β edo γ zenbakietariko bat nulua bada, berretzaile ez-nuludun faktoreen biderkadurari Hölder-en desberdintza aplikatuz, antzeko emaitza lortzen da.

(1.10) O-gaiaren ordena, (1.7) formula asintotikoaren O-gaiaren ordena baino txikiagoa da, $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ balioetarako.

Gauza bera gertatzen da (1.11) adierazpeneko O-gaiarekin.

(1.2), (1.7), (1.10), (1.11) eta (1.12) emaitzetatik hurrengo formula asintotikoa lortzen dugu $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ balioetarako:

$$\int_1^T |L(s, \chi)|^4 \, dt = T \frac{L^4(2\sigma, \chi_o)}{L(4\sigma, \chi_o)} +$$

$$+ O(T^{3/2-\sigma+\varepsilon}) + O(T^{\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{4}(2-2\sigma+\varepsilon)} \log^{\gamma/4} T) ,$$

non α, β, γ zenbaki osoak eta ez-negatiboak diren, $\alpha + \beta + \gamma = 4$ eta hauetariko bat gehienez nulua izanik. O-gaien barneko konstanteak k delakoaren menpean daude.

T infiniturantz doanerako aurreko formulan limiteak hartuz, $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ balioetarako (1.1) emaitza lortzen dugu; beraz, frogatu egin dugu teorema.

Azter dezagun $L(s, \chi)$ funtzioaren ordena goreneko berreduren batezbesteko balioa.

1.2 TEOREMA

Izan bitez χ k moduludun jatorrizko zertasun bat, χ_o k moduludun zertasun nagusia, c zenbaki osoa 2 baino handiagoa eta $s = \sigma + it$. Orduan, $\mathrm{Re}(s) > 1 - \frac{1}{c}$ planoerdian ondoko emaitza dugu:

$$(1.13) \qquad \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |L(s,\chi)|^{2c} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_c(n))^2 \chi_o(n)}{n^{2\sigma}} ,$$

non $d_c(n)$ funtzio aritmetikoak n zenbakia c faktoredun biderkadurazko adierazpideen kopurua ematen duen.

Frogapena

Aurreko (2.17) formularen arauera, (1.13) emaitza bete egiten da $Re(s) > 1$ planoerdian.
Har dezagun $1 - \frac{1}{c} < \sigma \leq 1$ zerroa.

$L(s, \chi)$ funtzioak aurreko ataleko 1.2 teoreman emandako ekuazio funtzional hurbildua egiaztatzen du.

Idatz dezagun

$$H(s, \chi) = E(\chi)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} .$$

Aipaturiko ekuazio funtzional hurbilduan, $x = y = \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}$, $t \geq 1$ eta $1 - \frac{1}{c} < \sigma \leq 1$ hartzen ditugu. Hala, ekuazio hori ondoko eran geratzen da:

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leq x(t)} \frac{\chi(n)}{n^s} + H(s,\chi) \sum_{n \leq x(t)} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} + O(t^{-\frac{1}{4}}) =$$

$$= Z_1 + Z_2 + O(t^{-\frac{1}{4}}) .$$

Beraz, zera dugu:

$$|L(s, \chi)|^{2c} = \Big(|Z_1|^2 + |Z_2|^2 + O(t^{-\frac{1}{2}}) + O(|Z_1||Z_2|) +$$

$$+ O(|Z_1|\, t^{-\frac{1}{4}}) + O(|Z_2|\, t^{-\frac{1}{4}}) \Big)^c =$$

$$= |Z_1|^{2c} + |Z_2|^{2c} + O(t^{-c/2}) +$$

(1.14)

$$+ \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=2c \\ 2c-1\geq \alpha,\beta,\gamma\geq 0 \\ \alpha,\beta,\gamma\in \mathbb{Z}}} O\left(|Z_1|^{\alpha} \; |Z_2|^{\beta} \; t^{-\gamma/4}\right) .$$

$1 - \frac{1}{c} < \sigma \leq 1$ zerroan (1.13) adierazpena frogatzeko, 1-etik T-raino integratuko dugu (1.14) baturako batugai bakoitza. Horretarako, adieraz dezagun $|Z_1|^{2c}$ delakoa $m_1, \ldots, m_c, n_1, \ldots, n_c$ aldagaietako batura gisa, hau da,

$$|Z_1|^{2c} = \sum \cdots\cdots\cdots \sum_{m_1,\ldots,m_c,n_1,\ldots,n_c\leq x(t)} \frac{\chi(m_1..m_c)\overline{\chi}(n_1..n_c)}{(m_1..m_c\; n_1..n_c)^{\sigma}} \left(\frac{n_1..n_c}{m_1..m_c}\right)^{it}$$

non aldagai bakoitzak 1 eta $x(t) = \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}$ delakoen arteko balioak hartzen dituen, $x(t)$ funtzioa $[1, T]$ tartean gorakorra delarik.

$$\int_1^T |Z_1|^{2c}\, dt = \sum \cdots \sum_{m_1,\ldots,n_c\leq \sqrt{\frac{k}{2\pi}}} \frac{\chi(m_1..m_c)\overline{\chi}(n_1..n_c)}{(m_1..m_c\; n_1..n_c)^{\sigma}} \int_1^T \left(\frac{n_1..n_c}{m_1..m_c}\right)^{it} dt +$$

$$+ \sum_{\sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m_1,\ldots,n_c)\leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \cdots\cdots \sum \frac{\chi(m_1..m_c)\overline{\chi}(n_1..n_c)}{(m_1..m_c\; n_1..n_c)^{\sigma}} \int_{T_1(m_1,\ldots,n_c)}^{T} \left(\frac{n_1..n_c}{m_1..m_c}\right)^{it} dt +$$

$T_1(m_1,\ldots,n_c)$ zenbaki erreal bat da, non

$$x(T_1(m_1,\ldots,n_c)) = \max(m_1,\ldots,n_c)$$

baita; hots,

$$T_1(m_1,\ldots,n_c) = \frac{2\pi}{k} \max(m_1^2,\ldots,n_c^2) .$$

Bakar dezagun $m_1..m_c = n_1..n_c$ kasua; hala, hauxe dugu:

$$\int_1^T |z_1|^{2c}\,dt = T \sum_{\substack{m_1..m_c=n_1..n_c \\ m_1,\dots,n_c \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \cdots \sum \frac{\chi_o(m_1..m_c)}{(m_1..m_c)^{2\sigma}} -$$

$$- \sum_{\substack{m_1..m_c=n_1..n_c \\ m_1,\dots,n_c \le \sqrt{\frac{k}{2\pi}}}} \cdots \sum \frac{\chi_o(m_1..m_c)}{(m_1..m_c)^{2\sigma}} -$$

(1.15)
$$- \sum_{\substack{m_1..m_c=n_1..n_c \\ \sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m_1,\dots,n_c) \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \cdots \sum \frac{\chi_o(m_1..m_c)}{(m_1..m_c)^{2\sigma}} T_1(m_1..n_c) +$$

$$+ \sum_{\substack{m_1..m_c \neq n_1..n_c \\ m_1,\dots,n_c \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \cdots \sum O\left(\frac{1}{(m_1..n_c)^{\sigma} \quad \left|\log \frac{n_1..n_c}{m_1..m_c}\right|} \right).$$

Baldin $1 \le r \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}$ bada, $m_1..m_c=n_1..n_c = r$ ekuazioetako emaitzen kopurua $(d_c(n))^2$ da, eta baldin $\sqrt{\frac{kT}{2\pi}} < r \le (\frac{kT}{2\pi})^{c/2}$ bada, emaitzen kopurua $(d_c(n))^2$ baino txikiagoa da. Beraz,

$$T \sum_{\substack{m_1..m_c=n_1..n_c \\ m_1,\dots,n_c \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \cdots \sum \frac{\chi_o(m_1..m_c)}{(m_1..m_c)^{2\sigma}} = T \sum_{r \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{(d_c(r))^2 \ \chi_o(r)}{r^{2\sigma}} +$$

$$+ O\left(T \sum_{\sqrt{\frac{kT}{2\pi}} < r = (\frac{kT}{2\pi})^{c/2}} \frac{(d_c(r))^2 \ \chi_o(r)}{r^{2\sigma}} \right) =$$

$$= T \sum_{r \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{(d_c(r))^2 \; \chi_o(r)}{r^{2\sigma}} + O\left(T \sum_{r > \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{(d_c(r))^2 \; \chi_o(r)}{r^{2\sigma}} \right) .$$

Hautazko ε konstante positiborako $d_c(r) = O(r^{\varepsilon})$ denez, (60),

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(d_c(r))^2 \; \chi_o(r)}{r^{2\sigma}} ,$$

seriea konbergentea da $\sigma > \frac{1}{2}$ denean; eta, ondorioz,

$$\sum_{r > \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{(d_c(r))^2 \; \chi_o(r)}{r^{2\sigma}} = o(1)$$

egiaztatzen da $\sigma > \frac{1}{2}$ denean. Honelatan, ba,

$$T \sum_{\substack{m_1 \cdot\cdot m_c = n_1 \cdot\cdot n_c \\ m_1, \ldots, n_c \le \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \cdots \sum \frac{\chi_o(m_1 \cdot\cdot m_c)}{(m_1 \cdot\cdot m_c)^{2\sigma}} =$$

$$= T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_c(n))^2 \; \chi_o(n)}{n^{2\sigma}} + O\left(T \sum_{r > \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{(d_c(r))^2 \; \chi_o(r)}{r^{2\sigma}} \right) =$$

$$= T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_c(n))^2 \; \chi_o(n)}{n^{2\sigma}} + O(T^{3/2-\sigma+\varepsilon}) \quad . \qquad (1.16)$$

(1.15) baturaren bigarren batugaia $O_k(1)$ da. Azter dezagun, orain, hurrengo batugaia:

$$\sum_{\substack{m_1\cdots m_c=n_1\cdots n_c\\ \sqrt{\frac{k}{2\pi}}<\max(m_1,\dots,n_c)\leq\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}}\cdots\sum \frac{\chi_0(m_1\cdots m_c)}{(m_1\cdots m_c)^{2\sigma}}\,T_1(m_1,\dots,n_c) <$$

$$< \frac{4\pi c}{k}\sum_{\substack{m_1\cdots m_c=n_1\cdots n_c\\ m_1,\dots,n_c\leq\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}}\cdots\sum \frac{m_1^2\,\chi_0(m_1\cdots m_c)}{(m_1\cdots m_c)^{2\sigma}} \leq$$

$$\leq \frac{4\pi c}{k}\sum_{m_1,\dots,m_c\leq\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}\cdots\sum \frac{m_1^2\,d_c(m_1\cdots m_c)}{(m_1\cdots m_c)^{2\sigma}} =$$

$$= O\left((kT)^{\varepsilon}\sum_{m_1\leq\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} m_1^{2-2\sigma}\sum_{m_2\leq\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} m_2^{-2\sigma}\cdots\sum_{m_c\leq\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} m_c^{-2\sigma}\right)=$$

$$= O\left((kT)^{3/2-\sigma+\varepsilon}\right), \qquad (1.17)$$

non ε hautazko konstante positibo bat den.

Estudia dezagun (1.15) delakoaren azken batugaia:

$$\sum_{\substack{m_1\cdots m_c\neq n_1\cdots n_c\\ m_1,\dots,n_c\leq\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}}\cdots\sum O\left(\frac{1}{(m_1\cdots n_c)^{\sigma}\quad\left|\log\frac{n_1\cdots n_c}{m_1\cdots m_c}\right|}\right) =$$

$$= O\left(\sum_{\substack{q\neq r\\ q,r=\left(\frac{kT}{2\pi}\right)^{c/2}}}\sum \frac{d_c(q)\quad d_c(r)}{(q\,r)^{\sigma}\quad\left|\log\frac{r}{q}\right|}\right) =$$

$$= O\left((kT)^{\varepsilon} \sum\sum_{0<q<r<(\frac{kT}{2\pi})^{c/2}} \frac{1}{(q\,r)^{\sigma}\ |\log \frac{r}{q}|} \right) =$$

$$(1.18) \qquad = O\left((kT)^{\varepsilon} \max\left\{ (kT)^{c(1-\sigma)}\log(kT),\ \log^{2}(kT) \right\} \right) ,$$

3.1 eta 3.3 lemen arauera, ε hautazko konstante positibo bat delarik. $\sigma > 1 - \frac{1}{c}$ balioetarako $c(1-\sigma) < 1$ denez, eta, gainera, edozein δ zenbaki erreal positibotarako $\log T = O(T^{\delta})$ denez, (1.15), (1.16), (1.17) eta (1.18) formuletatik hauxe ondorioztatzen da, $1 - \frac{1}{c} < \sigma \leq 1$ denean:

$$\int_{1}^{T} |Z_1|^{2c}\, dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_c(n))^2\, \chi_0(n)}{n^{2\sigma}} + O((kT)^{3/2-\sigma+\varepsilon}) +$$

$$(1.19) \qquad + O\left((kT)^{\varepsilon} \max\left\{ (kT)^{c(1-\sigma)} \log kT,\ \log^2 kT \right\} \right) .$$

Izan bedi

$$I(T) = \int_{1}^{T} \left| \sum_{n \leq \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}} \right|^{2c} dt =$$

$$= \int_{1}^{T} \sum \cdots \sum_{m_1,\ldots,n_c \leq \sqrt{\frac{kt}{2\pi}}} \frac{\chi(m_1\ldots m_c)\overline{\chi}(n_1\ldots n_c)}{(m_1\ldots m_c\ n_1\ldots n_c)^{1-\sigma}} \left(\frac{n_1\ldots n_c}{m_1\ldots m_c}\right)^{it} dt =$$

$$= \sum \cdots \sum_{m_1,\ldots,n_c \leq \sqrt{\frac{k}{2\pi}}} \frac{\chi(m_1\ldots m_c)\overline{\chi}(n_1\ldots n_c)}{(m_1\ldots m_c\ n_1\ldots n_c)^{1-\sigma}} \int_{1}^{T} \left(\frac{n_1\ldots n_c}{m_1\ldots m_c}\right)^{it} dt +$$

$$+ \sum \cdots \sum_{\sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m_1,\ldots,n_c) \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \frac{\chi(m_1\ldots m_c)\overline{\chi}(n_1\ldots n_c)}{(m_1\ldots m_c\ n_1\ldots n_c)^{1-\sigma}} \int_{T_1(m_1\ldots n_c)}^{T} \left(\frac{n_1\ldots n_c}{m_1\ldots m_c}\right)^{it} dt =$$

$$= T \sum_{\substack{m_1 \cdot\cdot m_c = n_1 \cdot\cdot n_c \\ m_1, \ldots, n_c \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \cdots \sum \frac{\chi_o(m_1 \cdot\cdot m_c)}{(m_1 \cdot\cdot m_c)^{2-2\sigma}} -$$

$$(1.20) \quad - \sum_{\substack{m_1 \cdot\cdot m_c = n_1 \cdot\cdot n_c \\ m_1, \ldots, n_c \leq \sqrt{\frac{k}{2\pi}}}} \cdots \sum \frac{\chi_o(m_1 \cdot\cdot m_c)}{(m_1 \cdot\cdot m_c)^{2-2\sigma}} -$$

$$- \sum_{\substack{m_1 \cdot\cdot m_c = n_1 \cdot\cdot n_c \\ \sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m_1, \ldots, n_c) \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \cdots \sum \frac{\chi_o(m_1 \cdot\cdot m_c)}{(m_1 \cdot\cdot m_c)^{2-2\sigma}} T_1(m_1, \ldots, n_c) +$$

$$+ \sum_{\substack{m_1 \cdot\cdot m_c \neq n_1 \cdot\cdot n_c \\ m_1, \ldots, n_c \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \cdots \sum O\left(\frac{1}{(m_1 \cdot\cdot m_c)^{1-\sigma} \quad \left|\log \frac{n_1 \cdot\cdot n_c}{m_1 \cdot\cdot m_c}\right|} \right) .$$

Azter dezagun (1.20) baturako batugai bakoitza.

$$T \sum_{\substack{m_1 \cdot\cdot m_c = n_1 \cdot\cdot n_c \\ m_1, \ldots, n_c \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \cdots \sum \frac{\chi_o(m_1 \cdot\cdot m_c)}{(m_1 \cdot\cdot m_c)^{2-2\sigma}} = O\left(T \sum_{r \leq (\frac{kT}{2\pi})^{c/2}} \frac{(d_c(r))^2 \ \chi_o(r)}{r^{2-2\sigma}} \right) =$$

$$= O\left(k^{\sigma c - c/2 + \varepsilon} \ T^{1 + \sigma c - c/2 + \varepsilon} \right) ,$$

ε hautazko konstante positibo bat izanik.

$$\sum_{\substack{m_1..m_c=n_1..n_c \\ \sqrt{\frac{k}{2\pi}} < \max(m_1,..,n_c) \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \cdots \sum \frac{\chi_0(m_1..m_c)}{(m_1..m_c)^{2-2\sigma}} \; T_1(m_1,..,n_c) <$$

$$< \frac{4\pi c}{k} \sum_{m_1,..,m_c \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} \cdots \sum \frac{m_1^2 \; d_c(m_1..m_c)}{(m_1..m_c)^{2-2\sigma}} =$$

$$= O\left((kT)^{\varepsilon} \sum_{m_1 \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} m_1^{2\sigma} \sum_{m_2 \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} m_2^{2\sigma-2} \cdots \sum_{m_c \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}} m_c^{2\sigma-2} \right) =$$

$$= O\left((kT)^{1+\varepsilon+\sigma c - c/2} \right) .$$

Azkenez, ondoko hau dugu:

$$\sum_{\substack{m_1..m_c \neq n_1..n_c \\ m_1,..,n_c \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}}} \cdots \sum O\left(\frac{1}{(m_1..m_c)^{1-\sigma} \; \left|\log \frac{n_1..n_c}{m_1..m_c}\right|} \right) =$$

$$= O\left(\sum_{\substack{r \neq q \\ r,q \leq (\frac{kT}{2\pi})^{c/2}}} \sum \frac{d_c(r) \;\; d_c(q)}{(r\;q)^{1-\sigma} \; \left|\log \frac{r}{q}\right|} \right) =$$

$$= O\left((kT)^{\varepsilon+\sigma c} \log(kT) \right) =$$

$$= O\left((kT)^{\varepsilon+\sigma c} \right) ,$$

3.2 lemaren arauera, ε hautazko konstante positiboa delako. Beraz, hauxe frogatu dugu:

$$I(T) = O\left((kT)^{\sigma c+\varepsilon}\right). \qquad (1.21)$$

σ delakoaren edozein baliotarako t infiniturantz doanean,

$$H(s, \chi) = O\left((k|t|)^{\frac{1}{2}-\sigma}\right)$$

dela dakigu; ondorioz, zera egiaztatzen da:

$$\int_1^T |Z_2|^{2c}\,dt = \int_1^T \left|H(s,\chi) \sum_{n\leq\sqrt{\frac{kt}{2\pi}}}' \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}}\right|^{2c} dt <$$

$$< A\int_1^T (kt)^{c-2c\sigma}\, I'(t)\,dt =$$

$$= A\left[(kT)^{c-2c\sigma}\, I(t)\right]_1^T + A(2c\sigma - c)\, k^{c-2c\sigma}\int_1^T t^{c-2c\sigma-1} I(t)dt =$$

$$= O\left((kT)^{c(1-\sigma)+\varepsilon}\right). \qquad (1.22)$$

Azpimarra dezagun $c(1-\sigma) < 1$ desberdintza betetzen dela eta ε hautazko konstante positibo bat dela.

Bestalde,

$$\int_1^T t^{-c/2}\,dt = O(1). \qquad (1.23)$$

(1.14) adierazpeneko batugaiak, zeintzuen [1, T] tartearen gaineko integralak ez ditugun oraindik kalkulatu, ondoko eratakoak dira:

$$O\left(|Z_1|^{\alpha}\ |Z_2|^{\beta}\ t^{-\gamma/4}\right),$$

non α, β, γ zenbaki osoak, $\alpha + \beta + \gamma = 2c$ eta $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 2c - 1$ diren. Gai horien integralak Hölder-en desberdintzaren bidez kalkulatzen dira. Hala, esate baterako, α, β, γ hertsiki positiboak badira, zera edukiko dugu:

$$\int_1^T |Z_1|^{\alpha} \, |Z_2|^{\beta} \, t^{-\gamma/4} \, dt <$$

$$< \left(\int_1^T |Z_1|^{2c} \, dt \right)^{\alpha/2c} \left(\int_1^T |Z_2|^{2c} \, dt \right)^{\beta/2c} \left(\int_1^T t^{-c/2} \, dt \right)^{\gamma/2c} =$$

$$= O\left(T^{\frac{\alpha}{2c} + \frac{\beta}{2c}(c(1-\sigma)+\varepsilon)} \, k^{\frac{\beta}{2c}(c(1-\sigma)+\varepsilon)} \right) =$$

$$= o_k(T) \quad , \tag{1.24}$$

zeren $\alpha + \beta \leq 2c$ baita, eta ε hautazko zenbaki erreal positiboa denez, $c(1-\sigma) + \varepsilon < 1$ izan dadin, ε behar den bezain txikia aukera daiteke.

α, β edo γ parametroetariko bat nulua bada, antzekoa da, integralaren kakulua.

(1.14) berdintzaren arauera eta (1.19), (1.22), (1.23) eta (1.24) bornapenak kontutan izanik, $1 - \frac{1}{c} < \sigma \leq 1$ tartean aldatzen den σ delakorako, ondoko berdintza asintotikoa idatz dezakegu:

$$\int_1^T |L(s,\chi)|^{2c} \, dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_c(n))^2 \, \chi_0(n)}{n^{2\sigma}} +$$

$$+ O(T^{3/2-\sigma+\varepsilon}) + O\left(T^{\varepsilon} \max(T^{c(1-\sigma)} \log kT, \log^2 kT) \right) +$$

$$+ O\left(T^{\frac{\alpha}{2c} + \frac{\beta}{2c}(c(1-\sigma)+\varepsilon)} \right),$$

bertan, α eta β zenbaki oso eta ez-negatiboak, $0 < \alpha + \beta \leq 2c$ eta ε hautazko zenbaki erreal positiboa direlarik. O-gaien barneko konstanteak k delakoaren menpean daude.

T infiniturantz doanerako formulan limiteak hartuz, (1.13) emaitza lortzen dugu $1 - \frac{1}{c} < \sigma \leq 1$ balioetarako; beraz, frogatu egin dugu teorema.

2. L(s, χ)-REN BERREDURA ERREALEN BATEZBESTEKO BALIOAREN TEOREMA.

Azpiatal honetan, $L(s, \chi)$ funtzioaren berredura errealen batezbesteko balioa $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian aztertzen da. Horretarako, lehenbizi, $d_c(n)$ funtzio aritmetikoa definitzen dugu, c zenbaki erreal positibo bat delarik, $Re(s) > 1$ planoerdian $L^c(s, \chi)$ funtzioaren Dirichlet-en seriezko garapenaren direz.

$Re(s) > 1$ planoerdian $L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p)\, p^{-s})^{-1}$ dugu, eta, berdintza horretan logaritmoak hartuz, hauxe ondorioztatzen da:

$$\log L(s, \chi) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}\, p^{-ms}\, \chi(p)^m ,$$

serie hori $Re(s) > 1$ planoerdian absolutuki konbergentea izanik. Logaritmoaren adar horretarako $L^c(s, \chi)$ berredurari dagokion adarra ondoko eran definitzen da:

$$L^{c}(s, \chi) = \exp(c \log L(s, \chi)) \quad , \quad Re(s) > 1 .$$

Honelatan, ba,

$$L^{c}(s, \chi) = \exp\left(c \sum_{p} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \; p^{-ms} \; \chi(p)^{m} \right) =$$

$$= \prod_{p} \exp\left(-c \log(1 - \chi(p)\, p^{-s}) \right) =$$

$$= \prod_{p} \left(1 - \chi(p)\, p^{-s}\right)^{-c} .$$

$(1-Z)^{-c}$ funtzioaren ardatz nagusiak $|Z| < 1$ balioetarako hurrengo Taylor-en seriezko garapen hau du:

$$\left(\frac{1}{1-Z}\right)^{c} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+m)}{\Gamma(c)m!} \, Z^{m} ,$$

Γ delakoa Euler-en gamma funtzioa delarik.

Baraz, $Re(s) > 1$ planoerdian,

$$L^{c}(s,\chi) = \prod_{p} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+m)}{\Gamma(c)m!} \; \chi(p^{m}) \; p^{-ms} \right) .$$

$d_c(n)$ delakoa honela definitzen dugu: funtzio aritmetiko biderkakorra, non edozein m zenbaki oso eta positibotarako eta edozein p zenbaki lehenetarako

$$d_c(p^{m}) = \frac{\Gamma(c+m)}{\Gamma(c)m!} \tag{2.1}$$

egiaztatzen den. Hala, $Re(s) > 1$ planoerdian

$$L^{c}(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_c(n)\ \chi(n)}{n^s}$$

dugu.

c zenbakia osoa denean, $d_c(n)$ delakoak n zenbakiaren c faktoredun biderkadurazko deskonposaketen kopurua adierazten du, funtzio hori aurreko teoremetan aipatua izan delarik.

LEMA

Hautazko $\varepsilon > 0$ eta finkatutako $k > 0$ zenbakietarako, $d_k(n) = O(n^{\varepsilon})$ betetzen da.

Frogapena

Har dezagun $l \geq k$ zenbaki oso bat. l-ren gaineko indukzioz, emandako edozein m zenbaki oso eta positibotarako,

$$\frac{l(l+1)\ (l+2)\ \dots\ (l+m+1)}{m!} \leq (m+1)^{l}$$

dela frogatzen da. Hots,

$$d_l(p^m) \leq d_2(p^m)^{l} = d(p^m)^{l} \quad .$$

$d_l(n)$ eta $d_2(n) = d(n)$ funtzioak biderkakorrak direnez,

$$d_l(n) \leq d_2(n)^{l} = d(n)^{l}$$

erlazioak ditugu.

$d_l(n)$ funtzioaren definizioaren arauera, bistakoa da, n zenbaki finko baterako $d_l(n)$ delakoa l-rehin hazten dela. Beraz, $k \leq l$ denez, zera betetzen da:

$$d_k(n) \leq d(n)^l \quad .$$

Baina edozein ε zenbaki erreal positibotarako $d(n) = O(n^{\varepsilon})$ denez, (26), aurreko desberdintzatik $d_k(n) = O(n^{\varepsilon})$ dela ondorioztatzen da.

2.1 TEOREMA

Izan bitez χ k moduludun jatorrizko zertasun bat, k zenbaki osoa 1 baino handiagoa eta χ_0 k moduludun zertasun nagusia. Orduan, $0 < c \leq 2$ bada, $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian ondoko hau egiaztatzen da:

$$(2.2) \qquad \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(s, \chi)|^{2c} \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_c(n))^2 \chi_0(n)}{n^{2\sigma}} \quad ,$$

$s = \sigma + it$ izanik eta $d_c(n)$ funtzioa (2.1) formulaz definituriko funtzio aritmetiko biderkakorra delarik.

Frogapena

$c = 1$ kasua aurreko ataleko 1.3 teorematik ondorioztatzen da. Hala,

$$\int_0^1 |L(s, \chi)|^2 \, dt = O(1)$$

denez, $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian hauxe dugu:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L(s, \chi)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_c(n))^2 \, \chi_o(n)}{n^{2\sigma}} .$$

Gainera, χ k moduludun jatorrizko zertasun bat denez, $\overline{\chi}$ delakoa ere, jatorrizkoa da; beraz, $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} |L(s, \chi)|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L(\bar{s}, \chi)|^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L(s, \overline{\chi})|^2 dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_c(n))^2 \, \chi_o(n)}{n^{2\sigma}} .$$

Honelatan, ba, planoerdi horretan hauxe betetzen da:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(s, \chi)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_c(n))^2 \, \chi_o(n)}{n^{2\sigma}} .$$

Era berean, aurreko 1.1 teorematik $c = 2$ kasua ondorioztatzen da. Har dezagun $0 < c < 2$ kasua.

$Re(s) > 0$ planoerdian hurrengo funtzioa definitzen dugu:

$$L_N(s, \chi) = \prod_{\substack{p < N \\ p \text{ primo}}} \left(1 - \chi(p)\, p^{-s}\right)^{-1} ,$$

N, bi baino handiagoa den edozein zenbaki arrunta delarik, eta izan bedi,

$$\eta_N(s, \chi) = \frac{L(s, \chi)}{L_N(s, \chi)} .$$

Bistakoa da N infiniturantz doanean $\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdian $L_N(s, \chi)$ funtzioak $L(s, \chi)$ funtziorantz jotzen duela.

$L(s, \chi) = L_N(s, \chi) + (L(s, \chi) - L_N(s, \chi))$ eta

$L_N(s, \chi) = L(s, \chi) + (L_N(s, \chi) - L(s, \chi))$ direnez,

ondoko desberdintzak betetzen dira (25):

$$\left(\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^{2c} dt\right)^R \leq \left(\int_{-T}^{T} \left(|L_N(s,\chi)| + |L(s,\chi) - L_N(s,\chi)|\right)^{2c} dt\right)^R \leq$$

$$\leq \left(\int_{-T}^{T} |L_N(s,\chi)|^{2c} dt\right)^R + \left(\int_{-T}^{T} |L(s,\chi) - L_N(s,\chi)|^{2c} dt\right)^R \tag{2.3}$$

eta

$$\left(\int_{-T}^{T} |L_N(s,\chi)|^{2c} dt\right)^R \leq \left(\int_{-T}^{T} \left(|L(s,\chi)| + |L_N(s,\chi) - L(s,\chi)|\right)^{2c} dt\right)^R \leq$$

$$\leq \left(\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^{2c} dt\right)^R + \left(\int_{-T}^{T} |L(s,\chi) - L_N(s,\chi)|^{2c} dt\right)^R, \tag{2.4}$$

non $0 < 2c \leq 1$ bada, $R = 1$ den, eta $2c > 1$ bada, $R = \frac{1}{2c}$ den.

Teorema frogatzeko, $|L_N(s,\chi)|^{2c}$ eta $|L(s,\chi) - L_N(s,\chi)|^{2c}$ funtzioen $[-T, T]$ tartearen gaineko integralen limitea bilatuko dugu, T infiniturantz doanean.

Izan bedi λ edozein zenbaki erreal positibo eta lor dezagun $L_N^{\lambda}(s, \chi)$ funtzioaren Dirichlet-en seriezko garapena. Horretarako, $|Z| < 1$ balioetarako egiaztatzen den $(1-Z)^{-\lambda}$

funtzioaren Taylor-en seriezko garapena erabiltzen dugu ondoko eran:

$$
\begin{aligned}
(L_N(s,\chi))^{\lambda} &= \prod_{p<N} \left(1 - \chi(p)\, p^{-s}\right)^{-\lambda} = \\
&= \prod_{p<N} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)\, m!}\, \chi(p^m)\, p^{-ms} \right) = \\
&= \prod_{p<N} \left(\sum_{m=0}^{\infty} d_{\lambda}(p^m)\, \chi(p)^m\, p^{-ms} \right) = \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n:p|n \Rightarrow p<N}}^{\infty} \frac{d_{\lambda}(n)\, \chi(n)}{n^s} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{\lambda}^{N)}(n)\, \chi(n)}{n^s} \quad , \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

non, n zenbakiaren faktore lehenak N baino txikiagoak badira, $a_{\lambda}^{N)}(n) = d_{\lambda}(n)$ den, eta beste kasuetan $a_{\lambda}^{N)}(n) = 0$ den; hala, bereziki $n < N$ denean, $a_{\lambda}^{N)}(n) = d_{\lambda}(n)$ da. Gainera,(2.5) seriea, $Re(s) > 0$ planoerdian absolutuki konbergenteak diren serieen kopuru finitu baten biderkadura denez, absolutuki konbergentea da planoerdi horretan, eta, Dirichlet-en serieen propietateen ondorioz,uniformeki konbergentea da $Re(s) \geq \varepsilon$ planoerdian, ε hautazko zenbaki erreal positibo bat izanik.

Aurreko atalaren 2.1 lemaren arauera, $Re(s) > 0$ planoerdian zera egiaztatzen da:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L_N(s,\chi)|^{2\lambda} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(a_\lambda^{N)}(n)\right)^2 \chi_0(n)}{n^{2\sigma}} \qquad (2.6)$$

N infiniturantz doanerako limitea existitzen bada, ondoko berdintza beteko da:

$$\lim_{N \to \infty} \left(\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L_N(s,\chi)|^{2\lambda} dt \right) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(a_\lambda^{N)}(n)\right)^2 \chi_0(n)}{n^{2\sigma}}$$

Baina, $n < N$ denean, $a_\lambda^{N)}(n) = d_\lambda(n)$ egiaztatzen da; beraz,

$$\lim_{N \to \infty} a_\lambda^{N)}(n) = d_\lambda(n) \quad ,$$

eta, ondorioz $\sigma > \frac{1}{2}$ planoerdian hauxe betetzen da:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(a_\lambda^{N)}(n)\right)^2 \chi_0(n)}{n^{2\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d_\lambda(n)\right)^2 \chi_0(n)}{n^{2\sigma}} , \qquad (2.7)$$

$d_\lambda(n) = O(n^\varepsilon)$ delako, ε hautazko zenbaki erreal positibo bat izanik. Honelatan, ba, (2.7) seriea konbergentea da, $\sigma > \frac{1}{2}$ denean.

Hala, $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian hurrengo hau ondorioztatzen da:

(2.8)

$$\lim_{N \to \infty} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L_N(s,\chi)|^{2\lambda} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d_\lambda(n)\right)^2 \chi_0(n)}{n^{2\sigma}} .$$

Teorema frogatzeko, $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian ondorengo emaitza frogatuko dugu:

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |L(s,\chi) - L_N(s,\chi)|^{2c}\, dt = 0 \quad .$$

Horretarako, ondoko berdintzak kontsideratuko ditugu:

$$|L(s,\chi) - L_N(s,\chi)|^{2c} = |\eta_N(s,\chi)-1|^{2c}\ |L_N(s,\chi)|^{2c} =$$

$$= \left(|\eta_N(s,\chi)-1|^4\right)^{c/2} \left(|L_N(s,\chi)|^{\frac{4c}{2-c}}\right)^{1-c/2} \quad .$$

Hölder-en desberdintzaren arauera, hauxe dugu:

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)-L_N(s,\chi)|^{2c}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left(|\eta_N(s,\chi)-1|^4\right)^{c/2} \left(|L_N(s,\chi)|^{\frac{4c}{2-c}}\right)^{1-c/2} dt \leq$$

(2.9)

$$\leq \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\eta_N(s,\chi)-1|^4 dt\right)^{c/2} \cdot \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |L_N(s,\chi)|^{\frac{4c}{2-c}} dt\right)^{1-c/2} \quad .$$

$L(s,\chi)$ eta $L_N(s,\chi)$ funtzioak $Re(s) > 0$ planoerdian anali-tikoak direnez eta $L_N(s,\chi)$ anulatzen ez denez, $\left(\eta_N(s,\chi)-1\right)^2$ funtzioa planoerdi horretan analitikoa da. Gainera, $\left(\eta_N(s,\chi)-1\right)^2$ funtzioak $Re(s) > 1$ planoerdian Dirichlet-en seriezko garapen bat onartzen du, planoerdi horretan hurrengo berdintzak egiaztatzen direlako:

$$\left(\eta_N(s,\chi)-1\right)^2 = \left(\prod_{p\geq N} \left(1-\chi(p)\, p^{-s}\right)^{-1} - 1\right)^2 =$$

$$= \prod_{p \geq N} \left(1- \chi(p)\, p^{-s}\right)^{-2} - 2 \prod_{p \geq N} \left(1- \chi(p) p^{-s}\right)^{-1} + 1 =$$

$$= \prod_{p \geq N} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d(p^m)\ \chi(p^m)}{p^{ms}} \right) -$$

$$- 2 \prod_{p \geq N} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{p^{ms}} \right) + 1 =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n:p|n \Rightarrow p \geq N}}^{\infty} \frac{d(n)\ \chi(n)}{n^s} - 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n:p|n \Rightarrow p \geq N}}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} + (1-2+1) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_N(n)\ \chi(n)}{n^s} , \qquad (2.10)$$

non, $b_N(n)$ funtzio aritmetikoak, n-ren faktore lehenak berdin N edo N baino handiagoak badira, $b_N(n) = d(n) - 2$ berdintza betetzen duen, eta beste kasuetan $b_N(n) = 0$ den. (2.10) seriea absolutuki konbergentea da $Re(s) > 1$ planoerdian.

Jakina da, $L(s, \chi)$ funtzioak, χ k moduludun jatorrizko zertasuna eta $k > 1$ direlarik, $Re(s) > 0$ planoerdian ondoko adierazpen integrala onartzen duela:

$$L(s, \chi) = s \int_1^{\infty} \sum_{n \leq u} \chi(n) \frac{du}{u^{s+1}} .$$

Bereziki, $Re(s) \geq \frac{1}{2}$ planoerdian hauxe ondorioztatzen da:

$$L(s, \chi) = O\left(|s| \int_1^{\infty} \left| \sum_{n \leq u} \chi(n) \right| \frac{du}{u^{3/2}} \right) = O(|s|) ,$$

zeren edozein $u \geq 1$ zenbakitarako eta edozein χ zertasun ez-nagusitarako $\sum_{n\leq u} \chi(n) = \varphi(k)$ den. Beraz, $Re(s) \geq \frac{1}{2}$ planoerdian $L(s, \chi)$ funtzioa t aldagaian ordena finituzkoa da. Gainera, $Re(s) > 0$ planoerdian,

$$|\eta_N(s, \chi)-1| \leq 1 + |L(s, \chi)| \prod_{p < N} |1 - \chi(p)\, p^{-s}| \leq$$

$$\leq 1 + 2^N |L(s, \chi)| .$$

Ondorioz, $Re(s) \geq \frac{1}{2}$ planoerdian $\left(\eta_N(s, \chi)-1\right)^2$ funtzioa t aldagaian ordena finituzkoa da. Hortik hurrengo hau ere $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian ateratzen da:

$$\int_{-T}^{T} |\eta_N(s, \chi)-1|^4\, dt \leq \int_{1}^{T} \left(1 + 2^N |L(s, \chi)|\right)^4 dt =$$

$$= O\left(\int_{-T}^{T} |L(s, \chi)|^4\, dt\right) = O(T) \quad ,$$

aurreko 1.1 teoremaren arauera.

$\left(\eta_N(s, \chi)-1\right)^2$ funtzioa $Re(s) > 0$ planoerdian analitikoa denez, $Re(s) > 1$ planoerdian absolutuki konbergentea den (2.10) seriez garagarria denez, eta, $Re(s) \geq \frac{1}{2}$ planoerdian t aldagaian ordena finituzkoa denez, eta, horretaz gainera,

$\int_{-T}^{T} |\eta_N(s, \chi)-1|^4\, dt = O(T)$ bornapena betetzen denez, Carlson-en teorema (59) aplikatuz, $Re(s) = \sigma > \frac{1}{2}$ planoerdian hauxe dugu:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\eta_N(s,\chi)-1|^4 \, dt =$$

(2.11)
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_N^2(n)\ \chi_0(n)}{n^{2\sigma}} \quad .$$

$n < N$ zenbakietarako $b_N(n) = 0$ dela eta, generalki, $0 \leq b_N(n) < d(n)$ desberdintzak betetzen direla kontutan izanik, hurrengo bornapena ondorioztatzen da:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_N^2(n)\ \chi_0(n)}{n^{2\sigma}} \right| \leq \sum_{n\geq N} \frac{d^2(n)}{n^{2\sigma}} \quad .$$

ε edozein zenbaki erreal positibo izanik $d(n) = O(n^{\varepsilon})$ denez, $\sigma > \frac{1}{2}$ balioetarako $\sum_{n=1}^{\infty} d^2(n)\ n^{-2\sigma}$ seriea konbergentea da; beraz, N infiniturantz doanean, $\sum_{n\geq N} d^2(n)\ n^{-2\sigma}$ hondarrak zerorantz jotzen du. Honelatan, ba, N infiniturantz doanean, (2.11) berdintzan limiteak hartuz, $Re(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian zera ondorioztatzen da:

(2.12)
$$\lim_{N\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\eta_N(s,\chi)-1|^4 \, dt = 0 \ .$$

(2.9) desberdintzan limiteak hartuz, ondoko hau lortzen dugu:

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(s,\chi) - L_N(s,\chi)|^{2c} \, dt \leq$$

$$\leq \lim_{N \to \infty} \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} | \eta_N(s, \chi) - 1|^4 \, dt \right)^{c/2} .$$

$$. \lim_{N \to \infty} \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L_N(s, \chi)|^{4c/(2-c)} \, dt \right)^{1-c/2} .$$

(2.8) formularen arauera, $\lambda = \frac{4c}{2-c}$ baliorako, hauxe dugu, $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian:

$$\lim_{N \to \infty} \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L_N(s, \chi)|^{\frac{4c}{2-c}} \, dt \right)^{1-c/2} = O(1) .$$

Emaitza hori eta (2.12) adierazpena kontutan harturik, $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ planoerdirako hurrengo emaitza ondorioztatzen da:

$$(2.13) \qquad \lim_{N \to \infty} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(s, \chi) - L_N(s, \chi)|^{2c} \, dt = 0 .$$

Teorema frogatzeko, (2.3) eta (2.4) desberdintzak eta, hala ber, (2.8) $\lambda = c$ kasuko emaitza eta (2.13) emaitza erabiliko ditugu.

Har dezagun lehenik $0 < 2c \leq 1$ kasua. Baldintza honetan, (2.3) eta (2.4) desberdintzetatik zera ondorioztatzen dugu:

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L_N(s, \chi)|^{2c} \, dt - \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(s, \chi) - L_N(s, \chi)|^{2c} \, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(s, \chi)|^{2c} \, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |L_N(s,\chi)|^{2c}\, dt + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)-L_N(s,\chi)|^{2c}\, dt \ .$$

(2.8) eta (2.13) emaitzen arauera, zera dakigu: aurreko berdintza - katearen muturretako adierazpenen T infiniturantz doaneko limiteen N infiniturantz doaneko limiteak existitzen dira, $Re(s) > \frac{1}{2}$ denean, eta, horretaz gainera, limite horiek berdinak dira.

Beraz, $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^{2c}\, dt$ adierazpena N-rekiko independentea denez, bilatutako emaitza lortzen da:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^{2c}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d_c(n)\right)^2 \chi_o(n)}{n^{2\sigma}}$$

$Re(s) = \sigma > \frac{1}{2}$ denean.

Har dezagun, orain, $1 < 2c$ kasua. (2.3) eta (2.4) desberdintzetatik hauxe dugu:

$$\left(\int_{-T}^{T} |L_N(s,\chi)|^{2c}\, dt\right)^{1/2c} - \left(\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)-L_N(s,\chi)|^{2c}\, dt\right)^{1/2c} \leq$$

$$\leq \left(\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^{2c}\, dt\right)^{1/2c} \leq$$

$$\leq \left(\int_{-T}^{T} |L_N(s,\chi)|^{2c}\, dt\right)^{1/2c} + \left(\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)-L_N(s,\chi)|^{2c}\, dt\right)^{1/2c} .$$

Aurreko kasuaren erara kasu honetan ere, (2.2) ondorioztatzen da, (2.8) eta (2.13) emaitzetan oinarrituz.

III: A T A L A

L-FUNTZIO OROKORTUA

Sarreran aipatzen genuenez, mende honetako Matematikaren problema ireki ospatsuenetariko bat, $\zeta(s)$ funtziorako Riemann-en hipotesi izenez ezagututako konjetura da, eta baita ere, Dirichlet-en L-funtzioetarako Piltz-ek emandako Riemann-ek hipotesi orokortua.

Problema hori ebazten saiatu dira hainbat matematikari, $\zeta(s)$ eta, generalki, $L(s,\chi)$ funtzioen propietate analitikoen eta funtzio hauen zeroen banaketaren arteko menpekotasuna aztertuz. Aldiz, lortutako emaitza batzu ez dira guztiz egokiak izan. Hala, adibidez, ondoko propietateak dituzten funtzioak eraiki daitezke: $\zeta(s)$ funtzioaren ekuazio funtzionalaren antzeko ekuazioa betetzen dutenak, eta $\zeta(s)$ funtzioak egiaztatzen dituen teorema gehienen pareko teoremak egiaztatzen dituztenak baina Dirichlet-en seriezko garapena ez dutenak eta zeintzuetarako Riemann-en hipotesiaren pareko konjetura faltsua den (58).

Atal honetan, Dirichlet-en L-funtzioen jokabide analitikotik abiatuz, jokabide analitiko desberdina, eta aldiz, zero ez-nabari berberak dituzten funtzioak eraikiko ditugu. Funtzio horiek Dirichlet-en seriezko garapena eta Euler-en biderkaduraz ko garapena izango dituzte, baina, generalki, ez dute ekuazio funtzionalik egiaztatzen, eta ezin dira $Re(s) = 0$ zuzenaren ezkerretara analitikoki luzatu.

1. $F(s,\chi)$ FUNTZIOAREN ERAIKETA ETA BERAREN LUZAPEN ANALITIKOA $Re(s) > 0$ PLANOERDIRAKO

1.1. DEFINIZIOA

Izan bedi $\{q_n\}$ zenbaki oso eta positiboen segida hertsi ki gorakor bat, zeinek ondoko baldintzak egiaztatzen baititu:

1) p_n delakoak n-garren zenbaki lehena adierazten badu eta n_o zenbaki arrunt bat bada, n_o edo n_o baino handiagoa den edozein n zenbaki oso eta positibotarako, q_n zenbakiak on doko desberdintzak betetzen ditu:

(1.1) $p_n \leq q_n \leq p_{n+1} + O(1)$

non $O(1)$ ikurrez adierazitako funtzio aritmetikoa positiboa den.

$q_1, q_2, \ldots, q_{n_o-1}$ delakoak edozeintzu zenbaki oso, positibo eta 1 baino handiago direlarik.

2) n zenbaki arrunt guztietarako.

(1.2) $q_n \equiv p_n \pmod{k}$

erlazioa betetzen da, non k delakoa, emandako edozein zenbaki oso eta positibo baita.

1.2. DEFINIZIOA

1.1 definizioko baldintzak betetzen dituen $\{q_n\}$ segida baterako, eta $Re(s) > 1$ izanik, $F(s,\chi)$ funtzioa definitzen da ondoko eran:

$$F(s,\chi) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\chi(q_n)}{q_n^s}\right)^{-1} , \tag{1.3}$$

non $\chi(n)$ delakoak k (k zenbaki oso eta positiboa) moduludun Dirichlet-en zertasun bat adierazten baitu eta $s = \sigma + it$ baita. Biderkadura infinitu hori absolutuki konbergentea da $Re(s) > 1$ planoerdian, planoerdi honetan n zenbaki arrunt guztietarako $\chi(q_n)\, q_n^{-s} \neq 1$ delako, eta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\chi(q_n) q_n^{-s}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{-\sigma} \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} < +\infty$$

egiaztatzen delako.

Gainera, aurreko biderkadura infinitua $Re(s) \geq 1 + \varepsilon$ planoerdian uniformeki konbergentea da edozein ε zenbaki erreal positibotarako, eta $F(s,\chi)$ funtzioa $Re(s) > 1$ planoerdian anulatzen ez den funtzio analitikoa da, zeren $Re(s) > 1$ planoerdian $\chi(q_n)\ q_n^{-s}$ funtzio analitikoak baitira eta $\mathrm{Re}(s) \geq 1+\varepsilon$ planoerdirako

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\chi(q_n)\ q_n^{-s}| \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\varepsilon} < +\infty$$

betetzen baita.

Hurrengo frogapenetan erabiliko ditugun desberdintza batzu ondoko leman biltzen ditugu, erraz egiaztatzen direlarik.

LEMA

m_o zenbaki arrunterako eta x, y, ε, u zenbaki errealetarako non $0<x<1$, $0<y<1$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ eta $u>0$ erlazioak betetzen baitira, ondoko desberdintzak ditugu:

i) $1 < \dfrac{1-x}{1-x^y} < y^{-1}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{1-x^y} = y^{-1}$ izanik.

ii) Baldin $f(x) = \sum\limits_{m>m_o} m^{-1}x^m$ bada, orduan

$$0 < f(x) < \frac{x^{m_o+1}}{(1-x)(m_o+1)}$$

iii) $1-(1-\varepsilon)^u < (1+\varepsilon)\ (1-e^{-\varepsilon u})$

1.3. DEFINIZIOA

Izan bedi

$$(1.4) \quad h_{\chi}(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\chi(p_n)}{p_n^s}\right) \left(1 - \frac{\chi(q_n)}{q_n^s}\right)^{-1} ,$$

non p_n delakoak n-garren zenbaki lehena adierazten baitu eta $\{q_n\}$ segida 1.2 definizioan kontsideratua baita. (1.4) formulako biderkadura infinitua absolutuki konbergentea da $Re(s) > 1$ planoerdian, eta $h_{\chi}(s)$ funtzioa ez da anulatzen planoerdi honetan. Gainera, $Re(s) > 1$ planoerdirako

$$(1.5) \qquad F(s,\chi) = h_{\chi}(s) \; L(s,\chi)$$

berdintza dugu. (1.4) formulako biderkadura infinitua ere uniformeki konbergentea da $Re(s) \geqslant 1 + \varepsilon$ planoerdian edozèin zenbaki erreal positibotarako, eta $h_{\chi}(s)$ funtzioa analitikoa da $Re(s) > 1$ planoerdian.

1.1. TEOREMA

(1.4) formulako biderkadura infinitua absolutuki konbergentea da $Re(s) > 0$ planoerdian eta $h_{\chi}(s)$ funtzioa ez da anulatzen planoerdi honetan. Gainera, biderkadura hori uniformeki konbergentea da, $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, $|t| \leq T$ desberdintzen bidez emandako multzo trinkoetan, σ_0 , σ_1 , T konstante errealak eta $\sigma_1 > \sigma_0 > 0$, $T > 0$ direlarik. Hala, $Re(s) > 0$ planoerdian $h_{\chi}(s)$ funtzioa analitikoa da eta ez da anulatzen.

Frogapena

Teorema frogatzeko, aski da, (1.4) formulako biderkadura infinitua, $\sigma_o \leq \sigma \leq 1$, $|t| \leq T$ desberdintzez emandako C laukizuzenetan absolutuki eta uniformeki konbergentea dela agertzea, σ_o eta T edozein bi zenbaki erreal positibo izanik. Horretarako, nahiko da

$$(1.6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(1 - \frac{\chi(p_n)}{p_n^{\,s}}\right) - \log \left(1 - \frac{\chi(q_n)}{q_n^{\,s}}\right) \right)$$

seriea C laukizuzenetan absolutuki eta uniformeki konbergentea dela frogatzea.

$Re(s) > 1$ planoerdian (1.4) delakoaren biderkadura infinitua absolutuki konbergentea denez, eta $h_\chi(s)$ funtzioa anulatzen ez denez, (1.4) formulan logaritmoak hartuz, $Re(s) > 1$ planoerdirako

$$\log h_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log (1 - \chi(p_n) p_n^{-s}) - \log (1 - \chi(q_n) q_n^{-s}) \right)$$

berdintza dugu, seriea planoerdi honetan absolutuki konbergentea delarik. $\log (1 - \chi(p_n)\, p_n^{-s})$ eta $\log (1 - \chi(q_n)\, q_n^{-s})$ funtzioak $\chi(p_n)\, p_n^{-s}$ eta $\chi(q_n)\, q_n^{-s}$ expresioen berredura-serietaz garagarriak dira $Re(s) > 0$ planoerdian ($|\chi(p_n)\, p_n^{-s}| < 1$ eta $|\chi(q_n)\, q_n^{-s}| < 1$); beraz, (1.6) seriea ondoko eran idatz daiteke:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} (\chi(q_n)^m q_n^{-ms} - \chi(p_n)^m p_n^{-ms}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \chi(p_n^m) (q_n^{-ms} - p_n^{-ms}) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-1} \chi(p_n^m) (q_n^{-ms} - p_n^{-ms}) , \qquad (1.7)$$

non baturen trukaketa konbergentzia absolutuagatik justifikaturik dagoen. Gainera, (1.7) serie bikoitza $Re(s) \geq 1 + \varepsilon$ planoerdian uniformeki konbergentea da, ε edozein zenbaki erreal positibo izanik.

n zenbaki arrunt guztietarako $|\chi(n)| \leq 1$ denez gero, hurrengo bornapena dugu:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} (\log(1 - \chi(p_n) p_n^{-s}) - \log(1-\chi(q_n) q_n^{-s}))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} |q_n^{-ms} - p_n^{-ms}| \qquad (1.8)$$

Honelatan, ba, (1.8) seriea C laukizuzenetan uniformeki konbergentea dela frogatuz, (1.6) seriea laukizuzen hauetan absolutuki eta uniformeki konbergentea dela agertuko dugu.

Finkaturiko $s = \sigma + it$ punturako, izan bedi $m_o = [\sigma^{-1}] + 1$, non x ikurrak x-en zati osoa adierazten duen. (1.8) formularen m-ren gaineko seriea zati bitan banatzen dugu:

$$\sum_{m=1}^{\infty} = \sum_{m \leq m_o} + \sum_{m > m_o}$$

Ikus dezagun lehendabizi,

$$(1.9) \quad \sum_{m > m_o} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-1} \left| q_n^{-ms} - p_n^{-ms} \right|$$

delakoa uniformeki konbergentea dela C laukizuzenetan.

$$\sum_{m > m_o} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-1} \left| q_n^{-ms} - p_n^{-ms} \right| \leq \sum_{m > m_o} m^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (q_n^{-m\sigma} + p_n^{-m\sigma})$$

$n \geq n_o$ zenbaki arruntetarako $p_n \leq q_n$ denez gero, ondoko desberdintza dugu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (q_n^{-m\sigma} + p_n^{-m\sigma}) \leq 2\, n_o\, 2^{-m\sigma} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-m\sigma} .$$

Beraz,

$$\sum_{m > m_o} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-1} \left| q_n^{-ms} - p_n^{-ms} \right| \leq$$

$$\leq 2\, n_o \sum_{m > m_o} m^{-1}\, 2^{-m\sigma} + 2 \sum_{m > m_o} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-1} p_n^{-m\sigma} =$$

$$= 2\, n_o \sum_{m > m_o} m^{-1}\, 2^{-m\sigma} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m > m_o} m^{-1} p_n^{-m\sigma} ,$$

non baturen trukaketa C laukizuzenetan serie bikoitzaren konbergentzia absolutuagatik justifikaturik dagoen

$(m\sigma > m_o \sigma = ([\sigma^{-1}] + 1) \sigma \geq \sigma^{-1} \sigma = 1)$.

Lemaren ii) desberdintzaren arauera, $x = p_n^{-\sigma}$ delakorako, hurrengo bornapena lortzen dugu:

$$\sum_{m>m_o} m^{-1} p_n^{-m\sigma} \leq \frac{p_n^{-\sigma(m_o+1)}}{(1 - p_n^{-\sigma})(m_o + 1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(1 - 2^{-\sigma_o})(m_o+1) \; p_n^{\sigma m_o + \sigma}} <$$

$$< \frac{C_1}{p_n^{1+\sigma_o}} ,$$

non $C_1 = (1 - 2^{-\sigma_o})^{-1}$ den,

$$\sigma m_o + \sigma = \sigma(\sigma^{-1} + 2) > \sigma (\sigma^{-1} + 1) \geq 1 + \sigma_o$$

delako.

Honelatan, ba, C laukizuzen bateko s puntuetarako, (1.9) formularen ondoko bornapena dugu:

$$\sum_{m>m_o} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-1} |q_n^{-ms} - p_n^{-ms}| \leq \frac{2 n_o C_1}{2^{1+\sigma_o}} + 2C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^{1+\sigma_o}} ,$$

non

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^{1+\sigma_o}}$$

zenbakizko seriea konbergentea baita; eta lortutako bornea s puntuaeen menpean ez dagoenez, (1.9) serie errepikatua C multzo trinkoetan uniformeki konbergentea da.

Azter dezagun orain

$$(1.10) \qquad \sum_{m=1}^{m_o} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-1} \left| q_n^{-ms} - p_n^{-ms} \right|$$

seriea. C multzoko edozein s punturako,

$$m_o = \left[\sigma^{-1}\right] + 1 \leq \sigma^{-1} + 1 \leq \sigma_o^{-1} + 1$$

desberdintzak betetzen direnez gero, C multzoan m_o delakoa, hautatutako s puntuaren menpekoa ez den balio batez bornaturik dago, eta (1.10) delakoaren m indizearen gaineko batura, finitua da. Beraz, (1.10) seriea C laukizuzen bakoitzean uniformeki konbergentea dela frogatzeko, aski da

$$(1.11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left| q_n^{-ms} - p_n^{-ms} \right| , \qquad\qquad 1 \leq m \leq m_o ,$$

serieak laukizuzen horretan uniformeki konbergenteak direla agertzea.

n zenbaki arrunt guztietarako $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ idazten dugu. Hala eginik, ondoko hau dugu:

$$\left| p_n^{-ms} - q_n^{-ms} \right| = p_n^{-m\sigma} \left| 1 - x_n^{ms} \right| =$$

$$= p_n^{-m\sigma} \left| 1 - x_n^{m\sigma} e^{it\, m \log x_n} \right| \qquad (1.12)$$

Baldin $p_n = q_n$ bada, aurreko kendura anulatzen da. Demagun $p_n \neq q_n$ dela, eta borna dezagun azken moduluaren karratua.

$$|1 - x_n^{m\sigma} e^{it\, m \log x_n}|^2 =$$

$$= (1 - x_n^{m\sigma} \cos (tm \log x_n))^2 + x_n^{2m\sigma} \operatorname{sen}^2 (t\, m \log x_n) =$$

$$= (1 - x_n^{m\sigma})^2 + 2\, x_n^{m\sigma} (1 - \cos (t\, m \log x_n)).$$

Edozein α zenbaki errealetarako $1 - \cos \alpha < \frac{\alpha^2}{2}$ desberdintza detetzen denez, azken batura

$$(1 - x_n^{m\sigma})^2 + x_n^{m\sigma} (t\, m \log x_n)^2$$

batura baino txikiagoa da. Eta $0 < x < 1$ balioetarako egiaztatzen den $|\log x| < (1 - x)/x$ desberdintza erabiliz, azken adierazpena ondoko hau baino txikiagoa dela ondorioztatzen dugu:

$$(1 - x_n^{m\sigma})^2 + x_n^{m\sigma - 2}\, t^2\, m^2\, (1 - x_n)^2 =$$

$$= (1 - x_n^{m\sigma})^2 \left\{ 1 + \left(\frac{1 - x_n}{1 - x_n^{m\sigma}} \right)^2 x_n^{m\sigma - 2}\, t^2\, m^2 \right\} <$$

$$< (1 - x_n^{m\sigma})^2 \left\{ 1 + \left(\frac{1 - x_n}{1 - x_n^{m\sigma}} \right)^2 x_n^{-2}\, t^2\, m^2 \right\} \qquad (1.13)$$

Dakusagun x_n^{-2} berredura bornaturik dagoela.

$$x_n = \frac{p_n}{q_n} < 1 \quad , \quad n \geq n_o \quad ,$$

eta

$$p_n < q_n \leq p_{n+1} + O(1) \quad , \quad n \geqslant n_o$$

erlazioak ditugu. Zenbaki lehenaren teorema kontuan hartuz, hurrengo emaitza lortzen dugu:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; x_n^{-1} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} + O(1)}{p_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,\log(n+1)}{n\,\log\,n} = 1$$

Hala, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{-1} = 1$ dela frogatzen da. Beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{-2} = 1$ da, eta $n \to n_o$ denean $x_n^{-2} > 1$ da. Honelatan, ba, emandako, edozein $A > 1$ zenbaki errealetarako, N zenbaki arrunt bat existitzen da, non $n \geq N$ zenbaki arrunt guztietarako, $x_n^{-2} < A$ betetzen baita. Hala, $n \geqslant N$ zenbakietarako (1.13) biderkadura

$$(1 - x_n^{m\sigma})^2 \left\{ 1 + \left(\frac{1 - x_n}{1 - x_n^{m\sigma}} \right)^2 A\, t^2\, m^2 \right\} \qquad (1.14)$$

baino txikiagoa dela ondorioztatzen da. (1.14) adierazpena bornatzeko $m < m_o$ eta $m = m_o$ kasuak ditugu.

Baldin $m < m_o$ bada, orduan

$$m\sigma \leq (m_o - 1)\sigma = [\sigma^{-1}]\sigma \leq 1$$

da, eta lemaren i) desberdintzaren arauera ondokoak lortzen ditugu:

$$(1 - x_n^{m\sigma})^2 \left\{ 1 + \left(\frac{1 - x_n}{1 - x_n^{m\sigma}} \right)^2 A\, t^2\, m^2 \right\} \leq$$

$$\leq (1 - x_n^{m\sigma})^2 \left\{ 1 + (m\sigma)^{-2} A\, t^2\, m^2 \right\} \leq$$

$$\leq (1 - x_n^{m\sigma})^2 \left\{ 1 + A\, \sigma_o^{-2}\, T^2 \right\}.$$

Baldin $m = m_o$ bada, orduan

$$m\sigma = m_o\sigma = ([\sigma^{-1}] + 1)\sigma > \sigma^{-1}\sigma = 1$$

da; beraz,

$$\frac{1 - x_n}{1 - x_n^{m_o\sigma}} < 1$$

dela dugu. Desberdintza hori kontuan hartuz, (1.14) biderkadura ondoko eran bornatuko dugu:

$$(1 - x_n^{m_o\sigma})^2 \left\{ 1 + \left(\frac{1 - x_n}{1 - x_n^{m_o\sigma}} \right)^2 A\, t^2\, m_o^2 \right\} <$$

$$< (1 - x_n^{m_o\sigma})^2 \left\{ 1 + A\, t^2\, m_o^2 \right\} \leq$$

$$\leq (1 - x_n^{m_o \sigma})^2 \quad \left\{ 1 + A\, T^2 \, (\sigma_o^{-1} + 1)^2 \right\} .$$

Honelatan, $1 \leq m \leq m_o$ balioetarako, $n \geq N$ zenbaki arrunt guztietarako eta C laukizuzen baten s puntu guztietarako, hurrengo bornapena betetzen dela frogatu dugu:

$$\left|1 - x_n^{m\sigma} e^{it\, m \log x_n}\right| < C_2 \, (1 - x_n^{m\sigma}) \qquad (1.15)$$

non $C_2 = 1 + A\, T^2 \, (\sigma_o^{-1} + 1)^2$ balioa, soilik σ_o eta T konstanteen menpean dagoen. Beraz, $1 \leq m \leq m_o$ denean, (1.11) seriearen N-garren hondarrerako ondoko bornapena dugu:

$$\sum_{n \geq N} \left|p_n^{-ms} - q_n^{-ms}\right| \leq \sum_{n \geq N} C_2 \, p_n^{-m\sigma} \, (1 - x_n^{m\sigma}) =$$

$$= C_2 \sum_{n \geq N} (p_n^{-m\sigma} - q_n^{-m\sigma}) \leq$$

$$\leq C_2 \sum_{n \geq N} \left(p_n^{-m\sigma} - p_{n+1}^{m\sigma} \left(1 + \frac{O(1)}{p_{n+1}}\right)^{-m\sigma}\right) \qquad (1.16)$$

C laukizuzen baten $s = \sigma + it$ puntuetarako $m\,\sigma \leq m_o \sigma =$ $= ([\sigma^{-1}] + 1)\,\sigma \leq 1 + \sigma \leq 2$ denez gero, zera dugu:

$$\left(1 + \frac{O(1)}{p_{n+1}}\right)^{-m\sigma} \geq \left(1 + \frac{O(1)}{p_{n+1}}\right)^{-2}.$$

Beraz,

$$C_2 \sum_{n \geq N} \left(p_n^{-m\sigma} - p_{n+1}^{-m\sigma} \left(1 + \frac{O(1)}{p_{n+1}}\right)^{-m\sigma} \right) \leq$$

$$\leq C_2 \sum_{n \geq N} \left(p_n^{-m\sigma} - p_{n+1}^{-m\sigma} \left(1 + \frac{O(1)}{p_{n+1}}\right)^{-2} \right).$$

Baina

$$\left(1+\frac{O(1)}{p_{n+1}}\right)^{-2} = 1+\frac{p_{n+1}^2-(p_{n+1}+O(1))^2}{(p_{n+1}+O(1))^2} = 1+O\left(\frac{1}{p_{n+1}}\right)$$

denez, hauxe dugu:

$$C_2 \sum_{n\geq N} \left(p_n^{-m\sigma} - p_{n+1}^{-m\sigma} \left(1+\frac{O(1)}{p_{n+1}}\right)^{-2}\right) =$$

$$= C_2 \sum_{n\geq N} \left(p_n^{-m\sigma} - p_{n+1}^{-m\sigma} \left(1+O\left(\frac{1}{p_{n+1}}\right)\right)\right) =$$

$$= C_2 \sum_{n\geq N} (p_n^{-m\sigma} - p_{n+1}^{-m\sigma}) + O\left(\sum_{n\geq N} \frac{1}{p_{n+1}^{m\sigma+1}}\right) =$$

$$= C_2\, p_N^{-m\sigma} + O\left(\sum_{n\geq N} \frac{1}{p_{n+1}^{m\sigma+1}}\right) \leq$$

$$\leq C_2\, p_N^{-m\sigma_o} + O\left(\sum_{n\geq N} \frac{1}{p_{n+1}^{m\sigma_o+1}}\right)$$

s puntua C laukizuzenekoa denean. Azken adierazpena ez dago s-ren menpean, eta, horretaz gainera, $\sigma_o > 0$ denez, $\sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1}^{-(m\sigma_o+1)}$ serie konbergentea da; beraz, $\sum_{n\geq N} p_{n+1}^{-(m\sigma_o+1)} \longrightarrow 0$ $N \longrightarrow \infty$ denean. Bestalde, $C_2\, p_N^{-m\sigma_o} \longrightarrow 0$ $N \longrightarrow \infty$ denean. Honelatan, ba, s puntua C laukizuzen batekoa denean eta N infiniturantz doanean

$$\sum_{n\geq N} |\, p_n^{-ms} - q_n^{-ms} \,| \longrightarrow 0$$

dugu, limite hori s-tik independentea izanik. Hala, (1.11)seriea uniformeki konbergentea da C laukizuzenetan; beraz, (1.6) seriea

C laukizuzenetan absolutuki eta uniformeki konbergentea da eta, beraz, $h_\chi(s)$ funtzioa $Re(s) > 0$ planoerdian anulatzen ez den funtzio analitikoa da.

1.2. TEOREMA

χ, k moduludun zertasun baterako eta $Re(s) > 1$ planoerdirako (1.3) formulaz definituriko $F(s,\chi)$ funtzioak ondoko propietateak ditu:

1) $F(s,\chi) \neq 0$ da $Re(s) > 1$ planoerdian

2) $F(s,\chi)$ funtzioa analitikoki luza daiteke $Re(s) > 0$ planoerdira.

(1.17) $F(s,\chi) = h_\chi(s) \quad L(s,\chi)$

adierazpenaren bidez.

3) $F(s,\chi)$ funtzioak $Re(s) > 0$ planoerdian, $L(s,\chi)$ funtzioaren zero berberak anizkoiztasun berberekin ditu.

4) χ_0, k moduludun zertasun nagusia bada, orduan, $F(s,\chi_0)$ funtzioak s = 1 puntuan r hondarrezko polo sinple bat du, non

$$0 < r \leq \frac{\varphi(k)}{k} \prod_{\substack{n=1 \\ (p_n,k)=1}}^{n_0-1} \frac{1 - p_n^{-1}}{1 - q_n^{-1}}$$

baita, φ Euler-en funtzioa delarik. Baldin $\chi \neq \chi_0$ bada,

$F(s,\chi)$ funtzioak ez du puntu singularrik $Re(s) > 0$ planoerdian.

Frogapena

1) Baieztapena bistakoa da $F(s,\chi)$ funtzioaren definizioaren arauera.

1.1 teoremaren bidez, $Re(s) > 0$ planoerdian $h_\chi(s)$ funtzioa anulatzen ez dela eta analitikoa dela dakigu. Beraz, (1.17) berdintza $Re(s) > 0$ planoerdian betetzen dela, berehala ondorioztatzen da, eta formula horrek, $Re(s) > 0$ planoerdian $F(s,\chi)$ funtzioaren luzapen analitikoa ematen du. Gainera, $F(s,\chi)$ funtzioaren zeroak $L(s,\chi)$ funtzioaren zero berberak dira.

Froga dezagun 4) baieztapena. (1.17) formulatik, $F(s,\chi_0)$ funtzioak $s = 1$ puntuan polo sinplea duela ondorioztatzen dugu.

$$r = \operatorname*{Res}_{s=1} F(s,\chi_0) = \lim_{s\to 1} h_{\chi_0}(s)\, L(s,\chi_0)\,(s-1) =$$

$$= \operatorname*{Res}_{s=1} L(s,\chi_0) \lim_{s\to 1} h_{\chi_0}(s) =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k}\, h_{\chi_0}(1) =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k} \lim_{N\to\infty} \prod_{\substack{n=1 \\ (p_n,k)=1}}^{N} \frac{1 - p_n^{-1}}{1 - q_n^{-1}} =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k} \prod_{\substack{n=1 \\ (p_n,k)=1}}^{n_0-1} \frac{1-p_n^{-1}}{1-q_n^{-1}} \lim_{N\to\infty} \prod_{\substack{n=n_0 \\ (p_n,k)=1}}^{N} \frac{1-p_n^{-1}}{1-q_n^{-1}} \leq$$

$$\leq \frac{\varphi(k)}{k} \prod_{\substack{n=1 \\ (p_n,k)=1}}^{n_0-1} \frac{1-p_n^{-1}}{1-q_n^{-1}}$$

Azken desberdintza, $n \geq n_0$ zenbakietarako $p_n \leq q_n$ desberdintza betetzen delako egiaztatzen da. $r > 0$ dela bistakoa da. Baldin $\chi \neq \chi_0$ bada, $L(s,\chi)$ funtzioak $Re(s) > 0$ planoerdian puntu singularrik ez duenez, $F(s,\chi)$ funtzioak ere ez du.

1.3. TEOREMA

Izan bitez χ k moduludun zertasun bat eta $\{q_n\}$ 1.1 definizioko baldintzak betetzen dituen zenbaki osoen segida bat. $Re(s) > 1$ planoerdirako,

$$F(s,\chi) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \chi(q_n)\, q_n^{-s})^{-1}$$

formulaz definitzen den $F(s,\chi)$ funtzioak, planoerdi horretan ondoko Dirichlet-en serie absolutuki konbergentezko adierazpena du:

$$(1.18) \quad F(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{\lambda_n^s} ,$$

non $\lambda_n = g(n)$ funtzio aritmetikoa guztiz biderkakorra baita eta, p_m delakoak m-garren zenbaki lehena adierazten badu, m zenbaki guztietarako $g(p_m) = q_m$ baita.

Frogapena

$Re(s) > 1$ planoerdian ondoko hau dugu:

$$F(s,\chi) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \chi(q_n)\, q_n^{-s})^{-1} =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\chi(q_n)}{q_n^{s}} + \frac{\chi(q_n)^2}{q_n^{2s}} + \dots\right) =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi(q_n)^m}{q_n^{ms}} \right)$$

Biderkadura infinitua absolutuki konbergentea da $Re(s) > 1$ planoerdirako. Aurreko serieak $Re(s) > 1$ planoerdian absolutuki konbergenteak direnez gero, beraien kopuru finitu baten biderkadura kontsideratuz, baturen ordena truka egin dezakegu; hots,

$$P_N(s,\chi) = \prod_{n=1}^{N} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi(q_n)^m}{q_n^{ms}} \right) =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_N=0}^{\infty} \frac{\chi(q_1)^{m_1} \dots \chi(q_N)^{m_N}}{q_1^{m_1 s} \dots q_N^{m_N s}} =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_N=0}^{\infty} \frac{\chi(q_1^{m_1} \dots q_N^{m_N})}{(q_1^{m_1} \dots q_N^{m_N})^s}$$

n zenbaki guztietarako $p_n \equiv q_n \pmod{k}$ denez gero, $\chi(q_n^m) = \chi(p_n^m)$ berdintza egiaztatzen da. Beraz, hauxe dugu:

$$(1.19)\qquad P_N(s,\chi) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty} \frac{\chi(p_1^{m_1} \cdots p_N^{m_N})}{(q_1^{m_1} \cdots q_N^{m_N})^s}$$

Izan bedi g funtzio guztiz biderkakorra, non m zenbaki arrunt guztietarako $g(p_m) = q_m$ baita, eta idatz dezagun $\lambda_n = g(n)$. (1.19) adierazpenetik ondoko hau ateratzen da:

$$(1.20)\qquad P_N(s,\chi) = \sum^{N)} \frac{\chi(n)}{\lambda_n^s} ,$$

non $\sum^{N)}$ ikurrak, batura, soilik $p_1, p_2, \ldots ,p_N$ faktore lehenak dituzten n zenbaki arrunten gain egiten dela esan nahi duen.

$\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdian $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \chi(q_n)\, q_n^{-s})^{-1}$ biderkadura absolutuki konbergentea denez, izan bedi

$$F^*(s,\chi) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - |\chi(q_n) q_n^{-s}|)^{-1} =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + |\chi(q_n) q_n^{-s}| + |\chi(q_n)^2\, q_n^{-2s}| + \ldots)$$

Biderkadura infinitu hori konbergentea da $\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdian. (1.20) berdintzaren antzeko lorpidea erabiliz, hurrengo hau lortzen dugu:

$$P_N^*(s,\chi) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{(q_n)^m}{q_n^{ms}} \right| \right) =$$

$$= \sum^{N)} \left| \frac{\chi(n)}{\lambda_n^s} \right|$$

Orduan, $Re(s) > 1$ planoerdirako ondoko erlazioak ondorioztatzen ditugu:

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \frac{\chi(n)}{\lambda_n^s} \right| \leq \sum^{N)} \left| \frac{\chi(n)}{\lambda_n^s} \right| = P_N^*(s,\chi) \leq$$

$$\leq F^*(s,\chi) < +\infty$$

Hala,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{\lambda_n^s}$$

seriea $Re(s) > 1$ planoerdian absolutuki konbergentea dela frogatu dugu. Ager dezagun orain, serie horren batura $F(s,\chi)$ dela.

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{\lambda_n^s} - F(s,\chi) \right| \leq$$

$$\leq \left| P_N(s,\chi) - F(s,\chi) \right| + \left| \sum^{N)} \frac{\chi(n)}{\lambda_n^s} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{\lambda_n^s} \right| \leq$$

$$\leq \left| P_N(s,\chi) - F(s,\chi) \right| + \left| \sum_{n>N} \frac{\chi(n)}{\lambda_n^s} \right| < \varepsilon$$

desberdintzak betetzen dira, ε edozein zenbaki erreal positibo eta N zenbaki arrunt aski handia direlarik; zeren $N\to\infty$ denerako $P_N(s,\chi)$ delakoaren limitea $F(s,\chi)$ baita, eta azken batugaia, $Re(s)>1$ planoerdian konbergentea den serie baten N-garren hondarraren modulua baita. Horrela, teorema frogatua izan da.

2. $F(s,\chi)$ FUNTZIOAREN LUZAPEN ANALITIKOAREN AZTERKETA PLANO KONPLEXU OSORAKO

Ikusi dugunez, $h_\chi(s)$ eta $F(s,\chi)$ funtzioak $Re(s)>0$ planoerdirako analitikoki luzatuak izan daitezke.

Kasu batzutan, bistakoa da $h_\chi(s)$ funtzioa plano konplexu osorako analitikoki luzatua izan daitekeela; adibidez, n zenbaki arrunt guztietarako $q_n = p_n$ denean. Kasu hauetan, (1.17) berdintzatik, $F(s,\chi)$ funtzioa plano konplexu osorako analitikoki luza daitekeela ondorioztatzen dugu.

Bestalde, q_n zenbaki osoak, aukera ditzakegu, $h_\chi(s)$ funtzioak $Re(s) = 0$ zuzenean infinitu puntu singular izan ditzan, eta, gainera, puntu horien multzoa zuzen horretan dentsoa izan dadin.

Demagun, lehendabizi, χ k moduludun zertasun nagusia dela, hau da, $\chi=\chi_0$. Orduan,

$$h_{\chi_o}(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - p_n^{-s}\,\chi_o(p_n)}{1 - q_n^{-s}\,\chi_o(q_n)}$$

da, non p_n delakoak n-garren zenbaki lehena adierazten duen, eta q_n zenbaki osoen segidak 1.1 definizioaren baldintzak betetzen dituen. Demagun, horrez gainera, k zenbakiarekiko lehenak eta zenbaki ez-lehenak diren q_n zenbaki osoen multzoa, infinitua dela. q_n zenbaki oso hauen bakoitzeko, $h_{\chi_o}(s)$ funtzioak

$$1 - q_n^{-s}\,\chi_o(q_n) = 0$$

ekuazioaren s emaitza-puntuetan, hau da,

$$s = i\,t_{n,j} = i \cdot \frac{2\,j\,\pi}{\log q_n} \quad , \quad j \in Z \;,$$

puntuetan puntu singularrak ditu. Dakusagun, $s = it_{n,j}$ eratako puntuen multzoa $Re(s) = 0$ zuzenean multzo dentsoa dela, j indizeak zenbaki osoen multzoa korritzen duelarik, eta n indizeak $(q_n,k) = 1$ eta q_n zenbaki ez-lehenak diren zenbaki arruntak korritzen dituelarik.

$$\lim_{n\to\infty} t_{n,1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,\pi}{\log q_n} = 0$$

denez gero, edozein δ zenbaki erreal positibo emanik, $r = \frac{\log q_\alpha}{2\pi}$ (q_α ez-lehena eta $(q_\alpha,k) = 1$) existitzen da, non $0 < \frac{1}{r} < \delta$ den.

Izan bitez, a edozein zenbaki erreal eta δ guk nahi dugun bezain txikia den zenbaki erreal positiboa. Froga dezagun $s = ai$ zentrudun eta δ erradiodun $B(ai,\delta)$ bola irekiak bere barnean $s = it_{n,j}$ eratako punturik ba duela.

Izan bedi $u \in Z$, non $u \leq a \leq u + 1$ baita. $[x]$ ikurrak x-en zati osoa adierazten badu, ondoko desberdintzak ditugu:

$$\frac{[r]}{r} u \leq a \leq \frac{([r] + 1)}{r} (u + 1).$$

Ardatz irudikariaren gaineko hurrengo tarte itxiak kontsi deratzen baditugu

$$\left[\frac{[r]u}{r} i , \frac{[r]u + 1}{r} i\right] , \left[\frac{[r]u + 1}{r} i , \frac{[r]u + 2}{r} i\right] ,$$

$$\ldots\ldots, \left[\frac{[r](u + 1) + u}{r} i , \frac{([r] + 1)(u + 1)}{r} i\right]$$

$s = ai$ puntua aurreko tarteren batetan egongo da. Honelatan, ba, $m \in Z$, non $[r] u \leq m \leq [r] \cdot (u + 1) + u$ den, existitzen da, zeinetarako hurrengo desberdintzak egiaztatzen diren:

$$\frac{m}{r} i \leq ai \leq \frac{m + 1}{r} i$$

$\frac{1}{r} < \delta$ denez, ondoko erlazioak ondorioztatzen ditugu:

$$ai - \delta i < \frac{m}{r} i \leq ai \leq ai + \delta i$$

Beraz, $B(ai,\delta)$ bolaren barnean

$$\frac{m}{r}\, i \;=\; \frac{2\, m\, \pi}{\log q_\alpha}\, i$$

puntua dago; eta, honela, frogatu egin dugu, $Re(s) = 0$ zuzenean $h_{\chi_0}(s)$ funtzioaren puntu singularren multzoa dentsoa dela.

Izan bedi, orain, χ edozein k moduludun zertasun ez-nagusi. $Re(s) > 0$ planoerdian,

$$h_\chi(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - p_n^{-s}\,\chi(p_n)}{1 - q_n^{-s}\,\chi(q_n)}$$

dugu, non p_n delakoak n-garren zenbaki lehena adierazten baitu, eta $\{q_n\}$ segidak, 1.1 definizioaren baldintzak betetzen baititu. Izan bedi l zenbaki oso bat, non $0 < l < k$ eta $(l,k) = 1$ diren. Progresio aritmetikoetan zenbaki lehenen banaketari buruzko teoremaren arauera, $(l,k) = 1$ bada, infinitu p zenbaki lehen, $p \equiv l \pmod k$ delarik, existitzen dira.

Esate baterako, q_n zenbaki osoak $p_n \equiv l \pmod k$ denerako q_n ez-lehenak badira, l delakoa $0 < l < k$ eta $(l,k) = 1$ baldintzak betetzen dituen zenbaki oso eta finko bat delarik, $h_\chi(s)$ funtzioak $Re(s) = 0$ zuzenean dentso den puntu singularrez osotutako multzo infinitu bat duela froga dezakegu.

$p_n \equiv l \pmod k$ baldintza betetzen den n bakoitzerako,

$h_\chi(s)$ funtzioak

$$1 - q_n^{-s}\,\chi(1) = 0$$

ekuazioaren s emaitza-puntuetan puntu singularrak ditu, $\chi(q_n) = \chi(p_n) = \chi(1)$ delako. Hau da,

$$s = i\,t_{n,j} = i\,\frac{\beta(1) + 2\,j\,\pi}{\log q_n} \quad , \quad j \in Z \; ,$$

puntuetan, $\beta(1)$ delakoa $\chi(1) = e^{\beta(1)i}$ eta $0 \leq \beta(1) < 2\pi$ baldintzak betetzen dituen zenbakia izanik.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{\log q_n} = 0$$

denez gero, edozein δ zenbaki erreal positibo emanik, $r = \frac{\log q_\alpha}{2\pi}$ ($\alpha \ni p_\alpha \equiv 1 \pmod k$) existitzen da, non $0 < \frac{1}{r} < \delta$ den.

Izan bitez,, a edozein zenbaki erreal eta δ guk nahi dugun bezain txikia den zenbaki erreal positiboa. Izan bedi u zenbaki osoa, non $u \leq a \leq u + 1$ den; orduan, ondoko desberdintzak ditugu:

$$\frac{[r]\,(u-1)}{r} + \frac{\beta(1)}{2\pi r} \leq a \leq \frac{([r]+1\ \ (u+1)}{r} + \frac{\beta(1)}{2\pi r}$$

Tarte hori $\frac{1}{r}$ luzeradun tartetan zatituz, eta $\chi = \chi_0$ kasurako antzeko arrazonamenduari jarraituz, $B(ai,\delta)$ bola irekian $it_{n,j}$ eratako punturen bat existitzen dela frogatzen da .

Beraz, aztertzen ari garen kasuan, $Re(s) = 0$ zuzenean, $h_{\chi}(s)$ funtzioaren puntu singularren multzoa dentsoa da.

Ikusi dugunez, q_n zenbaki osoak aukera daitezke, haiei dagokien $h_{\chi}(s)$ funtziorako $Re(s) = 0$ zuzena berezko muga izan dadin, hau da, $Re(s) = 0$ zuzenaren ezkerretara $h_{\chi}(s)$ funtzioa analitikoki luzagarri izan ez dadin. Beraz, q_n zenbaki osoak aukera daitezke, dagokien $F(s,\chi)$ funtzioa $Re(s) = 0$ zuzenaren ezkerretara analitikoki luzatzeko modukoa izan ez dadin.

IV. A T A L A

L-FUNTZIOEN APLIKAZIOAK ADIERAZPEN ASINTOTIKOEN KALKULURAKO

Atal honetan, lehendabizi, $\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdirako $\dfrac{L^{q+1}(s, \chi)}{L(2s, \chi^2)}$ zatiduraren Dirichlet-en seriezko adierazpena lortzen dugu, χ k moduludun edozein zertasun, $L(s, \chi)$ zertasun horri elkartutako L-funtzioa, eta $q \geq 2$ zenbaki osoa direlarik. Lortutako formula, Ramanujan-ek $\dfrac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}$ zatidurarako emandakoaren orokorpena da, $\zeta(s)$ delakoa Riemann-en zeta funtzioa izanik. Ondoren, formula orokortuaren koefizienteekiko estimazio bat ondorioztatzen dugu. Azkenez, Dirichlet-en serie orokorren propietateak erabiliz, Mangoldt-en $\Lambda(n)$ funtzioa orokortzen duten funtzio aritmetiko batzu definitzen ditugu, eta beraien baturekiko formula asintotikoak frogatzen ditugu.

1. RAMANUJAN-EN FORMULA BATEN OROKORPENA, L-FUNTZIOEN KASUAN

1916 urtean Ramanujan-ek

$$(1.1) \qquad \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d(n))^2}{n^s}$$

berdintza frogatu zuen, $\zeta(s)$ Riemann-en zeta funtzioa eta $d(n)$ funtzio zatitzailea izanik.

Dirichlet-en L-funtzioen kasua kontsideratzen badugu, $Re(s) > 1$ planoerdian ondoko espresioak betetzen direla egiaztatzen da:

$$(1.2) \qquad \frac{L(s, \chi)}{L(2s, \chi^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)| \, \chi(n)}{n^s} ,$$

non $\mu(n)$ Möbius-en funtzioa eta $\chi(n)$ k moduludun edozein zertasun baitira;

$$(1.3) \qquad \frac{L^2(s, \chi)}{L(2s, \chi^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)} \, \chi(n)}{n^s} ,$$

$\nu(n)$ delakoa n-ren faktore lehen eta desberdinen kopurua izanik.

Ondoko teoreman

$$\frac{L^{q+1}(s, \chi)}{L(2s, \chi^2)}$$

zatiduraren Dirichlet-en zeriezko adierazpena ematen dugu, q zenbaki osoa eta 2 edo 2 baino handiago izanik.

TEOREMA

Izan bitez $L(s,\chi)$, k moduludun χ zertasunari elkartutako Dirichlet-en L-funtzioa, eta q, 2 edo 2 baino handiagoa den zenbaki osoa. Orduan, $Re(s) > 1$ planoerdian hauxe betetzen da:

$$(1.4) \qquad \frac{L^{q+1}(s,\chi)}{L(2s,\chi^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n)\, a_2(n) \ldots a_{q-2}(n)\, a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{v(n)}\, n^s} \chi(n) ,$$

non $a_t(n) = (\alpha_1+t)(\alpha_2+t) \ldots\ldots (\alpha_r+t)$ baita 1-etik (q-2)-raino aldatzen den t zenbaki osorako, eta

$a'_{q-1}(n) = (2\alpha_1 + q - 1)(2\alpha_2 + q - 1) \ldots (2\alpha_r + q - 1)$ baita, n-ren faktore lehenetako deskonposaketa $n = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots p_r^{\alpha_r}$ delarik.

Frogapena

$L^{q+1}(s,\chi)$ eta $L(2s,\chi^2)$ formulei $Re(s) > 1$ planoerdirako Euler-en biderkaketa-formula aplikatuz,

$$\frac{L^{q+1}(s,\chi)}{L(2s,\chi^2)} = \prod_p \frac{1}{(1-\chi(p)\,p^{-s})^{q+1}} \prod_p (1-\chi^2(p)p^{-2s})$$

berdintza lortzen dugu, biderkadura biak $Re(s) > 1$ planoerdian absolutuki konbergenteak direlarik; beraz, planoerdi horretan hauxe dugu:

$$\text{(1.5)}\qquad \frac{L^{q+1}(s,\chi)}{L(2s,\chi^2)} = \prod_p \frac{1+\chi(p)\,p^{-s}}{(1-\chi(p)\,p^{-s})^q}$$

Gara dezagun

$$\frac{1+\chi(p)\,p^{-s}}{(1-\chi(p)\,p^{-s})^q}$$

zatidura $\chi(p)\,p^{-s}$ delakoaren berreduretaz, $Re(s) > 1$ planoerdian $|\chi(p)\,p^{-s}| < 1$ da eta. $|x| < 1$ denerako, ondoko berredura-seriezko garapena dugu:

$$\frac{1+x}{(1-x)^q} = (1+x)\left\{\binom{-q}{0} + \binom{-q}{1}(-x) + \dots + \binom{-q}{\alpha}(-x)^{\alpha} + \dots\right\}$$

Garapen horretan x^{α} berreduraren koefizientea hauxe da:

$$\frac{q(q+1)\dots\dots(q+\alpha-1)}{\alpha!} + \frac{q(q+1)\dots\dots(q+\alpha-2)}{(\alpha-1)!} =$$

$$= \frac{(q+\alpha-1)!}{(q-1)\ \alpha!} + \frac{(q+\alpha-2)!}{(q-1)!\ (\alpha-1)!} =$$

$$= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots\dots(\alpha+q-1) + \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+q-2)}{(q-1)!} =$$

$$= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots\dots(\alpha+q-2)(2\alpha+q-1)}{(q-1)!} .$$

Beraz, $Re(s) > 1$ planoerdian hurrengo garapena dugu:

$$\frac{1+\chi(p)\,p^{-s}}{(1-\chi(p)\,p^{-s})^q} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+q-2)(2\alpha+q-1)}{(q-1)!\ p^{s\alpha}} (\chi(p))^{\alpha} =$$

$$\text{(1.6)}\qquad = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+q-2)(2\alpha+q-1)}{(q-1)!\ p^{s\alpha}}\ \chi(p^{\alpha})$$

Dei ditzagun $p_1, p_2, \ldots, p_r$ lehenbiziko r zenbaki lehenak eta kontsidera dezagun ondoko biderkadura finitua:

$$P_r = \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i+1)(\alpha_i+2)\ldots(\alpha_i+q-2)(2\alpha_i+q-1)}{(q-1)!\ \ p_i^{\alpha_i s}} \chi(p_i^{\alpha_i}) \right)$$

Serieak Re(s) > 1 planoerdian absolutuki kondergenteak direnez gero, beraien gaiak berrordena ditzakegu eta zeru edukiko dugu:

$$P_r = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{\alpha_r=0}^{\infty} \frac{\chi(p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r})}{(p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r})((q-1)!)^r} \left(\{(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_r+1)\} \cdot \right.$$

$$\cdot \{(\alpha_1+2)\ldots(\alpha_r+2)\} \cdot \ldots\ldots \cdot \{(\alpha_1+q-2)\ldots(\alpha_r+q-2)\} \cdot$$

$$\left. \cdot \{(2\alpha_1+q-1)\ldots\ldots(2\alpha_r+q-1)\} \right) .$$

Teoremaren enuntziatuan definituriko $a_t(n)$ $(t = 1,2,..q-2)$ eta $a'_{q-1}(n)$ funtzioak erabiliz, Re(s) > 1 planoerdirako hurrengo berdintza lortzen dugu:

$$(1.7) \qquad P_r = \sum^{(r)} \frac{a_1(n)\ a_2(n) \ldots a_{q-2}(n)\ a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{\nu(n)}\ \ n^s} \chi(n)$$

$\sum^{(r)}$ ikurrak, batuketa $p_1, p_2, \ldots, p_r$ faktore lehen bakarrak dituzten zenbaki arrunten gain egiten dugula adierazten du.

Teorema frogatzeko, Re(s) > 1 planoerdian $r \to \infty$ eginik, P_r delakoak limitea duela eta limite hori ondoko serie absolutuki konbergentearen batura dela egiaztatuko dugu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n)\ a_2(n)\ldots\ldots a_{q-2}(n)\ a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{v(n)}\ n^s}\ \chi(n) \tag{1.8}$$

Froga dezagun lehendabizi, (1.8) seriea $Re(s) > 1$ planoerdirako absolutuki konbergentea dela.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n)\ a_2(n)\ldots\ldots a_{q-2}(n)\ a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{v(n)}\ n^s}\ \chi(n) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n)\ a_2(n)\ldots a_{q-2}(n)\ a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{v(n)}\ n^{\sigma}}\ , \quad s = \sigma + it$$

desberdintza dugu, non

$$\frac{a_1(n)\ a_2(n)\ldots a_{q-2}(n)\ a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{v(n)}} = \prod_{t=1}^{q-2} \frac{a_t(n)}{t^{v(n)}}\ \frac{a'_{q-1}(n)}{(q-1)^{v(n)}} =$$

$$= \left\{ \prod_{t=1}^{q-2} \left(\frac{\alpha_1}{t} + 1\right) \ldots \left(\frac{\alpha_r}{t} + 1\right) \right\} \frac{2\,\alpha_1 + q - 1}{q - 1} \ldots \frac{2\,\alpha_r + q - 1}{q-1} \leq$$

$$\leq (d(n))^{q-2}\ d(n^2) \leq (d(n))^q = O(n^{\varepsilon})$$

baita, ε zenbaki erreal positiboa eta guk nahi dugun bezain txikia izanik. Beraz, (1.8) seriea absolutuki konbergentea da $Re(s) > 1$ planoerdian.

Banan dezagun P_r delakoaren (1.7) adierazpena bi zatitan, hots,

$$P_r = \sum_{n=1}^{r} \frac{a_1(n)\ a_2(n)\ \ldots\ a_{q-2}(n)\ a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{\nu(n)}\quad n^s}\ \chi(n) + A$$

A delakoak, faktore lehen bakarrak lehenbiziko r zenbaki lehenak dituzten $n > r$ zenbaki arrunten gaineko batura adierazten du. Honelatan, ba,

$$|A| \leq \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{a_1(n)\ a_2(n)\ \ldots\ a_{q-2}(n)\ a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{\nu(n)}\quad n^{\sigma}}\ |\chi(n)|$$

dugu, eta batura horrek $\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdirako $r \to \infty$ egitean zerorantz jotzen du, (1.8) serieari dagokion balio absolutuen seriearen r-garren hondarra delako.

Beraz, $\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdirako

$$\lim_{r \to \infty} P_r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n)\ a_2(n) \ldots a_{q-2}(n)\ a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{\nu(n)}\quad n^s}\ \chi(n)$$

ondorioztatzen dugu eta teorema frogaturik geratzen da.

q=2 eta q=3 kasu berezietan, $\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdirako hurrengo adierazpen hauek ateratzen dira:

$$\frac{L^3(s, \chi)}{L(2s, \chi^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_1(n)\ \chi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)\ \chi(n)}{n^s}\ ,$$

eta

$$\frac{L^4(s, \chi)}{L(2s, \chi^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n)\ a'_2(n)\ \chi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d(n))^2\ \chi(n)}{n^s}\ .$$

2. FORMULA OROKORTUAREN KOEFIZIENTEEKIKO ADIERAZPEN ASINTOTIKOA

Aurreko teoreman oinarrituz eta D. Redmond-ek emandako emaitza batetan (55) oinarrituz,

$$\sum_{n\leq x} \frac{a_1(n)..a_{q-2}(n)\, a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{\upsilon(n)}} \quad a_1(n+1)$$

baturarako formula asintotiko bat ondorioztatuko dugu, $a_1(n)$, ..., $a_{q-2}(n)$, $a'_{q-1}(n)$ funtzioak aurreko azpiatalean definituak izan direlarik eta $\upsilon(n)$ funtzioak n zenbakiaren faktore lehen eta desberdinen kopurua adierazten duelarik.

Demagun $\chi(n)$ delakoa Dirichlet-en k moduludun zertasun bat dela, $k \geq 1$ izanik, eta $L(s, \chi)$ funtzioa χ zertasunari elkartutako L-funtzioa dela. Horretaz gainera, izan bitez $c > -1$, N zenbaki oso eta positibo bat, $f(n)$ funtzio aritmetiko biderkakorra eta ez-negatiboa, eta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\ \chi(n)}{n^s} = G(s, \chi) \quad L^N(s-c, \chi)$$

$Re(s) > c + 1$ planoerdian, non $G(s, \chi)$ aldagai konplexudun funtzioak ondoko Dirichlet-en seriezko adierazpen hau onartzen duen:

$$G(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n, \chi)}{n^s} ,$$

serie hori $Re(s) > c + 1 - \varepsilon$ planoerdian absolutuki konbergentea, eta, ε delakoa zenbaki erreal positibo bat direlarik.

$G(s, \chi)$ eta $L(s-c, \chi)$ funtzioen Dirichlet-en seriezko adierazpenak $Re(s) > c + 1$ planoerdian absolutuki konbergenteak direnez, hauxe izango dugu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\ \chi(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n, \chi)}{n^s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\ n^c}{n^s} \right)^N =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n, \chi)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^c\ d_N(n)\ \chi(n)}{n^s} ,$$

$d_N(n)$ funtzio aritmetikoak, n zenbakia N faktoredun biderkaduraz ko adierazpideen kopurua ematen duelarik. Biderkadura hori eginik eta koefizienteak identifikatuz, zera dugu:

$$f(n)\ \chi(n) = g(n, \chi) * (\chi(n)\ n^c\ d_N(n)),$$

hots,

$$g(n, \chi) = f(n)\ \chi(n) * (\chi(n)\ n^c\ d_N(n))^{-1} =$$

$$= f(n)\ \chi(n) * \chi(n)\ (n^c\ d_N(n))^{-1} =$$

$$= \chi(n)\ (f(n) * (n^c\ d_N(n)^{-1}) ,$$

$\chi(n)$ funtzioa guztiz biderkakorra da eta. Beraz, $g(n, \chi)$ hurrengo eran adieraz daiteke:

$$g(n, \chi) = \chi(n)\ g(n),$$

$$g(n) = f(n) * (n^c\ d_N(n))^{-1} \quad \text{izanik.}$$

LEMA (55)

Izan bitez $\eta = \max \left\{ \frac{1}{2}, 1-\epsilon \right\}$, T_N delakoa $\frac{N}{4}$ edo 1, $N \geq 4$ edo $N < 4$ balioen arauera hurrenez hurren, $a = (1-\eta) / T_N$, $r = \left[\frac{N}{2}\right] + 2$ eta $b = \max (a, 1-a)$. Orduan, $f(n)$ funtzio aritmetikorako hauxe dugu:

$$\sum_{n \leq x} f(n)\, d(n+1) = K_1 x^{c+1} \log^N x + O(x^{c+1} \log^{N-1} x \log \log x) \tag{2.1}$$

non

$$K_1 = (2b + (c+1)^{r-1} (1-2b) \frac{G(c+1)}{\Gamma(N)\ (c+1)} \cdot$$

$$\cdot \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} g(p^j)\, p^{-j(c+1)} \right)^{-1} (1 - \frac{1}{p})^{N-1} \right\}$$

den, bertan $d(n)$ funtzio zatitzailea, $\Gamma(n)$ Euler-en funtzioa eta $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)\, n^{-s}$ direlarik.

Dakusagun, orain, ondoko teorema egiaztatzen dela:

TEOREMA

Baldin $q \geq 2$ zenbaki osoa bada, x infiniturantz doanean zera betetzen da:

$$\sum_{n \leq x} \frac{a_1(n) \ldots a_{q-2}(n)\, a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{\upsilon(n)}} a_1(n+1) =$$

$$(2.2) \qquad = \frac{6}{q!\,\pi^2} \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{q-1} \right\} x \log^{q+1} x +$$

$$+ O(x \log^q x \log\log x) \; .$$

$q = 3$ kasu berezian, Y. Motohashi-k, beste metodo batzu erabiliz, $\sum_{n \leq x} d(n)^2 \, d(n+1)$ baturarako emandako formula, (43), lortzen da.

Frogapena

Aurreko azpiatalean $\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdirako ondoko garapena lortu dugu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n) \ldots a_{q-2}(n) \; a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)^{v(n)} \; n^s} \; \chi(n) = \frac{L^{q+1}(s, \chi)}{L(2s, \chi^2)} \; ,$$

χ delakoa k moduludun edozein zertasun izanik.

Izan bedi

$$G(s, \chi) = \frac{1}{L(2s, \chi^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \; \chi^2(n)}{n^s}$$

$\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian.

Serie hori absolutuki konbergentea da $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ planoerdian. Azpimarra dezagun ondoko hau betetzen dela pianoerdi horretan:

$$G(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \; \chi^2(n)}{n^{2s}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \; \chi^2(n)}{n^{2s}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m) \; \chi(m)}{m^s} ,$$

non g(m) funtzio aritmetikoa hurrengo eraz definitzen den:

$$g(m) = \begin{cases} \mu(\sqrt{m}) & , \quad m = n^2 \text{ denean} \\ 0 & , \quad m \neq n^2 \text{ denean.} \end{cases}$$

Beraz,

$$G(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s} = \sum_{\substack{m=1 \\ m=n^2}}^{\infty} \frac{\mu(\sqrt{m})}{m^s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}} = \frac{1}{\zeta(2s)} \quad , \quad Re(s) > \frac{1}{2} .$$

$c = 0$ eta $N = q + 1$ hartuz, lemaren baldintzetan gaude. $g(n)$ funtzioaren definizioa eta Möbius-en $\mu(n)$ funtzioaren propietateak kontutan izanik, hauxe ondorioztatzen da:

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} g(p^j)\, p^{-j} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(p^j)}{p^{2j}} = 1 - \frac{1}{p^2} .$$

Lema erabiliz, hurrengo emaitza lortzen dugu:

$$\sum_{n\leq x} \frac{a_1(n)\ldots.a_{q-2}(n)\ a'_{q-1}(n)}{((q-1)!)\ \upsilon(n)}\ a_1(n+1) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(q+1)\ \zeta(2)} \prod_p \left\{1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^q\right\} x \log^{q+1}x +$$

$$+ O(x \log^q x \log\log x),$$

eta teorema frogaturik geratzen da.

3. FORMULA ASINTOTIKOAK BESTE FUNTZIO ARITMETIKO BATZUTARAKO

Ezaguna da, k zenbaki arrut bakoitzerako, Apostol-en $\mu_k(n)$ funtzio aritmetikoaren funtzio sortzailea,

$$P_k(s)\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_k(n)}{n^s} \tag{3.1}$$

dela, non

$$P_k(s) = \prod_p \left\{ 1 - \frac{2}{p^{ks}} + \frac{1}{p^{(k+1)s}} \right\} \tag{3.2}$$

den, biderkadura hori $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{k}$ planoerdian absolutuki konbergentea izanik.

(3.1) formula eta $\zeta(s)$ funtzioaren t-garren deribatuaren Dirichlet-en seriezko garapena kontutan izanik, $\mathrm{Re}(s) > 1$ planoerdirako ondoko berdintzak idatz ditzakegu:

$$(-1)^t \quad \zeta^{(t)}(s)\ \zeta(s)\ P_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_k(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^t n}{n^s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} \mu_k(d) \log^t\left(\frac{n}{d}\right) \right) \frac{1}{n^s} .$$

Serie horren koefizienteek Mangoldt-enaren eratako funtzio bat adierzten dute, $\Lambda_{k,t}(n)$ idatziko duguna; hots,

$$\Lambda_{k,t}(n) = \sum_{d|n} \mu_k(d) \log^t \frac{n}{d} . \tag{3.3}$$

$k = t = 1$ denean, $\mu_1(n) = \mu(n)$ denez, Mangoldt-en $\Lambda(n)$ funtzioa lortzen dugu. Baldin $k = 1$ eta $t = 1$ bada, A. Ivíc-en $\Lambda_t(n) = \Lambda_{1,t}(n)$ funtzioa dugu (30 , 31). $\Lambda_{k,t}(n)$ funtzioa aztertuko dugu, $k > 1$ eta t zenbaki positiboetarako.

3.1 TEOREMA

Edozein $m < t$ zenbaki osotarako, ondoko identitatea egiaztatzen da:

$$\Lambda_{k,t}(n) = \sum_{D|n} \Lambda_{1,t-m}(D) \log^m D \sum_{d|\frac{n}{D}} \mu_k(d) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \sum_{D|n} \Lambda_{k,i}(D) \; \Lambda_{1,t-m}\left(\frac{n}{D}\right) \log^{m-i}\left(\frac{n}{D}\right)$$

Frogapena

Hurrengo berdintzak betetzen dira:

$$\zeta^{(t)}(s) = \left(\zeta(s) \frac{\zeta^{(t-m)}(s)}{\zeta(s)} \right)^{(m)} =$$

$$= \zeta(s) \left(\frac{\zeta^{(t-m)}(s)}{\zeta(s)} \right)^{(m)} + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{m}{i} \zeta^{(i)}(s) \left(\frac{\zeta^{(t-m)}(s)}{\zeta(s)} \right)^{(m-i)}.$$

Aurreko berdintza $(-1)^t \zeta(s) P_k(s)$ funtzioaz biderkatuz, zera lortzen dugu:

$$(-1)^t \zeta(s) P_k(s) \zeta^{(t)}(s) = (-1)^t \zeta^2(s) P_k(s) \left(\frac{\zeta^{(t-m)}(s)}{\zeta(s)} \right)^{(m)} +$$

$$(3.5) \qquad + (-1)^t \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \zeta(s)\, P_k(s)\, \zeta^{(i)}(s) \left(\frac{\zeta^{(t-m)}(s)}{\zeta(s)} \right)^{(m-i)}.$$

Kalkula dezagun (3.5) berdintzako gaien Dirichlet-en seriezko garapena Re(s) > 1 planoerdian:

$$(-1)^t\, \zeta(s)\, P_k(s)\, \zeta^{(t)}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{k,t}(n)}{n^s}.$$

$$(-1)^t\, \zeta^2(s)\, P_k(s) \left(\frac{\zeta^{(t-m)}(s)}{\zeta(s)} \right)^{(m)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_k(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{1,t-m}(n)\, \log^m n}{n^s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{D|n} \Lambda_{1,t-m}(D)\, \log^m D \sum_{d|\frac{n}{D}} \mu_k(d) \right) n^{-s}.$$

$$(-1)^t \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \zeta(s)\, P_k(s)\, \zeta^{(i)}(s) \left(\frac{\zeta^{(t-m)}(s)}{\zeta(s)} \right)^{(m-i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_k(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^i n}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{1,t-m}(n)\, \log^{m-i} n}{n^s} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{D|n} \Lambda_{k,i}(D)\, \Lambda_{1,t-m}\left(\frac{n}{D}\right) \log^{m-i}\left(\frac{n}{D}\right) \right) n^{-s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \sum_{D|n} \Lambda_{k,i}(D)\, \Lambda_{1,t-m}\left(\frac{n}{D}\right) \log^{m-i}\left(\frac{n}{D}\right) \right) n^{-s}.$$

(3.5) delakoaren seriezko garapenetan koefizienteak identifikatuz, teorema ondorioztatzen da.

$k = 1$ denean, Ivíc-ek, (30), lortutako identitatea ateratzen da:

$$\Lambda_{1,t}(n) = \Lambda_{1,t-m}(n) \log^m n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \sum_{d|n} \Lambda_{1,i}(d) \, \Lambda_{1,t-m}\left(\frac{n}{d}\right) \log^{m-i} \frac{n}{d} \, .$$

Horretaz gainera, $k = m = 1$ kasuan, Kasara-k lortutako identitatea dugu:

$$\Lambda_{1,t}(n) = \Lambda_{1,t-1}(n) \log n + \sum_{d|n} \Lambda_{1,t-1}(d) \, \Lambda_{1,1}\left(\frac{n}{d}\right).$$

3.2 TEOREMA

Izan bitez k eta t zenbaki oso eta positiboak, $k > 1$. Ondoko formula asintotikoa betetzen da:

$$(3.6) \qquad \sum_{n \leq x} \Lambda_{k,t}(n) = P_k \, x \, \frac{\log^{t+1} x}{t+1} + O(x \log^t x) \, ,$$

non

$$P_k = P_k(1) = \prod_{p} \left\{ 1 - \frac{2}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}} \right\}$$

(p zenbaki lehena) den, "O" ikurraren barneko konstantea k eta t delakoen menpean dagoelarik.

Frogapena

k ordenako Möbius-en μ_k funtziorako, k > 1 denean hurrengo formula asintotikoa dugu (1):

$$\sum_{n\leq x} \mu_k(n) = P_k\, x + O(x^{1/k} \log x)$$

Honelatan, ba,

$$\sum_{n\leq x} \Lambda_{k,t}(n) = \sum_{n\leq x} \sum_{d|n} \mu_k(d) \left(\log \left(\frac{n}{d}\right)\right)^t =$$

$$= \sum_{\substack{d,q \\ dq\leq x}} \mu_k(d) (\log q)^t =$$

$$= \sum_{q\leq x} (\log q)^t \sum_{d\leq \frac{x}{q}} \mu_k(d) =$$

$$= \sum_{q\leq x} (\log q)^t \left\{ P_k \frac{x}{q} + O\left(\left(\frac{x}{q}\right)^{1/k} \log \left(\frac{x}{q}\right) \right) \right\} =$$

$$= P_k\, x \sum_{q\leq x} \frac{(\log q)^t}{q} + O\left(x^{1/k} \sum_{q\leq x} \frac{\log^t q}{q^{1/k}} \log \left(\frac{x}{q}\right) \right) \qquad (3.7)$$

Euler-en batuketa-formularen bidez, zera frogatzen da:

$$(3.8) \qquad \sum_{q\leq x} \frac{\log^t q}{q} = \frac{\log^{t+1} x}{t+1} + O(1)$$

(3.7) baturaren bigarren batugaian agertzen den batura partziala kalkulatzeko, lehendabizi, ondoko batura bilatuko dugu, (3.8) emaitza eta Abel-en batuketa-formula erabiliz:

$$\sum_{q\le x} \frac{\log^t q}{q^{1/k}} = \sum_{q\le x} \frac{\log^t q}{q} \; x^{1-1/k} -$$

$$- (1 - \frac{1}{k}) \int_1^x \sum_{q\le y} \frac{\log^t q}{q} \; \frac{dy}{y^{1/k}} =$$

$$= \frac{\log^{t+1} x}{t+1} \; x^{1-1/k} + (\frac{1}{k} - 1) \frac{1}{t+1} \int_1^x \frac{\log^{t+1} y}{y^{1/k}} \, dy +$$

$$+ O(x^{1-1/k}) = \frac{\log^{t+1} x}{t+1} \; x^{1-1/k} +$$

$$+ (\frac{1}{k} - 1) \frac{1}{t+1} \left(\frac{k}{k-1} \log^{t+1} x \quad x^{1-1/k} - \right.$$

$$\left. - k^2 \frac{t+1}{(k-1)^2} \log^t x \quad x^{1-1/k} + O(\log^{t-1} x \quad x^{1-1/k}) \right) +$$

$$+ O\,(x^{1-1/k}) =$$

$$= \frac{k}{k-1} \; x^{1-1/k} \; \log^t x + O\,(x^{1-1/k} \log^{t-1} x). \qquad (3.9)$$

(3.9) berdintza asintotikoa erabiliz, hauxe lortzen dugu:

$$\sum_{q\le x} \frac{\log^t q}{q^{1/k}} \; \log \frac{x}{q} = O(x^{1-1/k} \; \log^t x). \qquad (3.10)$$

(3.7) formulan (3.8) eta (3.10) berdintzak ordezkatuz, teorema ondorioztatzen dugu.

3.3 TEOREMA

Izan bitez k,r eta s zenbaki oso eta positiboak, k > 1. Orduan,

$$\sum_{mn\leq x} \Lambda_{k,r}(m)\ \Lambda_{k,s}(n) =$$

$$(3.11) \qquad = \frac{P_k^2\ x\ r!\ s!}{(r+s+3)!} \log^{r+s+3} x + O(x \log^{r+s+2} x)$$

betetzen da, non "O" ikurraren barneko konstantea r,s eta k dela koen menpean dagoen eta

$$P_k = \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}}\right)$$

den.

Frogapena

(3.11) formulako batura partziala, batura partzial errepikatuen bidez idazten dugu, eta 3.2 teoremaren arauera, hauxe dugu:

$$\sum_{mn\leq x} \Lambda_{k,r}(m)\ \Lambda_{k,s}(n) = \sum_{n\leq x} \Lambda_{k,r}(n) \sum_{m\leq \frac{x}{n}} \Lambda_{k,s}(m) =$$

$$= \sum_{n\leq x} \Lambda_{k,r}(n) \left\{ \frac{x}{n} P_k \frac{\log^{s+1}(x/n)}{s+1} + O\left(\frac{x}{n} \log^s \left(\frac{x}{n}\right)\right) \right\} =$$

$$= \frac{x\ P_k}{s+1} \sum_{n\leq x} \frac{\Lambda_{k,r}(n)}{n} \log^{s+1}\left(\frac{x}{n}\right) +$$

$$+ O\left(x \sum_{n\leq x} \frac{\Lambda_{k,r}(n)}{n} \log^s \left(\frac{x}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{x\ P_k}{s+1} \sum_{n\leq x} \frac{\Lambda_{k,r}(n)}{n} \sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} (-1)^i \log^{s+1-i} x \log^i n +$$

$$+ O(x \sum_{n\le x} \frac{\Lambda_{k,r}(n)}{n} \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (-1)^i \log^{s+i} x \log^i n) =$$

$$= \frac{P_k\, x}{s+1} \sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} (-1)^i \log^{s+1-i} x \sum_{n\le x} \frac{\Lambda_{k,r}(n)}{n} \log^i n +$$

$$+ O(x \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (-1)^i \log^{s-i} x \sum_{n\le x} \frac{\Lambda_{k,r}(n)}{n} \log^i n) \qquad (3.12)$$

Aurki dezagun orain

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda_{k,r}(n)}{n}$$

batura partziala Abel-en batuketa-formularen bidez eta 3.2 teorema berriz kontuan izanik.

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda_{k,r}(n)}{n} = \sum_{n\le x} \Lambda_{k,r}(n) \frac{1}{x} + \int_1^x \sum_{n\le t} \Lambda_{k,r}(n) \frac{dt}{t^2} =$$

$$= (P_k\, x \frac{\log^{r+1} x}{r+1} + O(x \log^r x)) \frac{1}{x} +$$

$$+ \int_1^x (P_k\, t \frac{\log^{r+1} t}{r+1} + O(t \log^r t)) \frac{dt}{t^2} =$$

$$= \frac{P_k}{(r+1)(r+2)} \log^{r+2} x + O(\log^{r+1} x) \qquad (3.13)$$

(3.13) adierazpen asintotikoaren arauera, eta Abel-en batuketa-formula berriz erabiliz, hurrengo hau ondorioztatzen da:

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda_{k,r}(n)}{n} \log^i n =$$

$$= \frac{P_k}{(r+1)(r+2+i)} \log^{r+2+i} x + O(\log^{r+1+i} x) \ , \qquad (3.14)$$

non "O" ikurraren barneko konstantea k eta r delakoen menpean baitago.

(3.14) emaitza (3.12) expresioan ordezkatuz, ondoko berdintza dugu:

$$\sum_{mn \leq x} \Lambda_{k,r}(m) \quad \Lambda_{k,s}(n) =$$

$$= \frac{P_k\, x}{s+1} \sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} (-1)^i \log^{s+1-i} x \left(\frac{P_k \log^{r+i+2} x}{(r+1)(r+i+2)} + \right.$$

$$\left. + O(\log^{r+i+1} x) . \right) + \qquad (3.15)$$

$$+ O\left\{ x \sum_{i=1}^{s} \binom{s}{i} (-1)^i \log^{s-i} x \left(\frac{P_k \log^{r+i+2} x}{(r+1)(r+i+2)} + O(\log^{r+i+1} x) \right) \right\} .$$

(3.11) lortzeko, aski da aurreko berdintza sinplifikatzea. Horretarako ondoko hau erabiliko dugu:

$$\frac{P_k\, x}{s+1} \frac{P_k}{r+1} \sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} (-1)^i \frac{1}{r+i+2} \log^{r+s+3} x =$$

$$= \frac{P_k^2\, x}{(s+1)(r+1)} \log^{r+s+3} x \sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} (-1)^i \frac{1}{r+i+2} =$$

$$= \frac{P_k^2\, x\, r!\, s!}{(r+s+3)!} \log^{r+s+3} x \ , \qquad (3.16)$$

Azken berdintza ondoko eran justifikatzen da:

$$\int_0^1 (1-t)^{s+1}\, t^{r+1} dt = \sum_{i=0}^{s+1} (-1)^i \binom{s+1}{i} \int_0^1 t^i\, t^{r+1} dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{s+1} (-1)^i \binom{s+1}{i} \frac{1}{r+i+2} =$$

$$= \frac{\Gamma(r+2)\ \ \Gamma(s+2)}{\Gamma(r+s+4)} =$$

$$= \frac{(r+1)!\ (s+1)!}{(r+s+3)!}$$

(3.16) emaitza (3.15) adierazpenean ordezkatuz, (3.11) lortzen da, eta egiaztatu egiten da teorema.

3.4 TEOREMA

Edozein k,t zenbaki oso eta positibotarako, $k > 1$, hauxe dugu:

$$\sum_{n\leq x} \Lambda_{1,1}(n)\ \Lambda_{k,t}(n) = x \log^t x + O(x \log^{t-1} x) \tag{3.17}$$

Frogapena

$\Lambda_{1,1}(n)$ funtzioa Mangoldt-en $\Lambda(n)$ funtzioa denez, funtzio honen definizioaren arauera, ondoko berdintza ondorioztatzen da:

$$\sum_{n\leq x} \Lambda_{1,1}(n)\ \Lambda_{k,t}(n) = \sum_{p^a\leq x} \log p\ \ \Lambda_{k,t}(p^a), \tag{3.18}$$

non p delakoak zenbaki lehenak korritzen baititu. (3.3) formularen bidez, $n = p^a$ zenbakietarako zera dugu:

$$\Lambda_{k,t}(p^a) =$$

$$= \sum_{d|p^a} \mu_k(d) \log^t\left(\frac{p^a}{d}\right) = \begin{cases} \log^t p & a = 1 \text{ denean} \\ \sum_{r=0}^{a-1} (a-r)^t \log^t p, & a \leq k \text{ denean} \\ \sum_{r=0}^{k-1} (a-r)^t - (a-k)^t) \log^t p, & a > k \text{ denean} \end{cases}$$

Funtzio bat, $f(a,t,k)$, definitzen dugu ondoko eran:

$$(3.19) \quad f(a,t,k) = \begin{cases} 1 & a = 1 \text{ denean} \\ \sum_{r=0}^{a-1} (a-r)^t & a \leq k \text{ denean,} \\ \sum_{r=0}^{k-1} (a-r)^t - (a-k)^t & a > k \text{ denean.} \end{cases}$$

Honelatan, ba,

$$\sum_{n \leq x} \Lambda_{1,1}(n) \; \Lambda_{k,t}(n) =$$

$$= \sum_{p \leq x} \log^{t+1} p + \sum_{\substack{p^a \leq x \\ a > 1}} f(a,t,k) \log^{t+1} p. \qquad (3.20)$$

$f(a,t,k)$ funtzioaren definizioaren arauera,

$$f(a,t,k) \leq a^{t+1}$$

dugu. Gainera, $p^a \leq x$ denez gero, p zenbaki lehen bakoitzerako $a \leq \frac{\log x}{\log p}$ dela ondorioztatzen da; hots,

$$f(a,t,k) \leq \frac{\log^{t+1} x}{\log^{t+1} p}$$

Beraz, ondoko bornapena lortzen dugu:

$$\sum_{\substack{p^a \leq 1 \\ a > 1}} f(a,t,k) \log^{t+1} p = \sum_{\substack{p^a \leq x \\ a > 1}} \frac{\log^{t+1} x}{\log^{t+1} p} \log^{t+1} p =$$

$$= \log^{t+1} x \sum_{\substack{p^a \leq x \\ a > 1}} 1 =$$

$$= \log^{t+1} x \, (\sum_{p \leq x^{1/2}} 1 + \sum_{p \leq x^{1/3}} 1 + \ldots) .$$

Parentesi arteko batugaien kopurua b-1 bada, zenbaki honek $2 \leq x^{1/b}$ desberdintza bete behar du; hau da, $b \leq \frac{\log x}{\log 2}$.

Honelatan, ba,

$$\sum_{\substack{p^a \leq x \\ a > 1}} f(a,t,k) \log^{t+1} p = O(\log^{t+2} x \sum_{p \leq x^{1/2}} 1) =$$

$$= O(\log^{t+2} x \; . \; \pi(\sqrt{x})) .$$

Eta $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ dela kontuan izanik,

$$\sum_{\substack{p^a \leq x \\ a > 1}} f(a,t,k) \log^{t+1} p = O(x^{1/2} \log^{t+1} x) \tag{3.21}$$

emaitza lortzen da.

(3.20) delakoaren beste batugaia bornatzeko, batuketa partziala eta zenbaki lehenen teorema, hots,

$$\theta(x) = \sum_{p\leq x} \log p = x + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \quad ,$$

erabiliko ditugu. Hala,

$$\sum_{p\leq x} \log^{t+1} p = \theta(x) \log^t x - t \int_1^x \theta(y) \frac{\log^{t-1} y}{y} \, dy$$

berdintza dugu, eta,

$$\left| \int_1^x \frac{\theta(y)}{y} \log^{t-1} y \, dy \right| \leq \int_1^x \left|\frac{\theta(y)}{y}\right| \log^{t-1} y \, dy =$$

$$= O\left(\int_1^x \log^{t-1} y \, dy \right) =$$

$$= O(x \log^{t-1} x)$$

denez gero, azkenean hauxe dugu:

$$\sum_{p\leq x} \log^{t+1} p = x \log^t x + O(x \log^{t-1} x). \tag{3.22}$$

(3.21) eta (3.22) berdintzak (3.20) formulan ordezkatuz, (3.17) lortzen da, eta frogatu egin da teorema.

3.5 TEOREMA

Izan bitez k,t,l,i zenbaki oso eta positiboak, $k > 1$ eta $(l,i) = 1$. Orduan, ondoko berdintza betetzen da:

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv 1 (\mathrm{mod}\ i)}} \Lambda_{1,1}(n)\ \Lambda_{k,t}(n) = \frac{x \log^t x}{\varphi(i)} + O(x \log^{t-1} x) \ , \tag{3.23}$$

non φ Euler-en funtzio aritmetikoa den.

Frogapena

Progresio aritmetikoetarako zenbaki lehenaren teoremaren arauera, $(in + 1)$ progresio aritmetikorako, non n delakoak zenbaki arruntak korritzen dituen eta $(1,i) = 1$ den, ondoko berdintza asintotikoa betetzen da (47):

$$\theta(x;\ i,\ 1) = \sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ i)}} \log p = \frac{x}{\varphi(i)} + O(\frac{x}{\log x}). \tag{3.24}$$

$\Lambda_{1,1}(n)$ funtzioa Mangoldt-en funtzioa dela kontuan izanik, hauxe idatz dezakegu:

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv 1 (\mathrm{mod}\ i)}} \Lambda_{1,1}(n)\ \Lambda_{k,t}(n) = \sum_{\substack{p^a\leq x \\ p^a\equiv 1 (\mathrm{mod}\ i)}} \Lambda_{k,t}(p^a) \log p =$$

$$= \sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ i)}} \log^{t+1} p + \sum_{\substack{p^a\leq x \\ a > 1 \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ i)}} f(a,t,k) \log^{t+1} p, \tag{3.25}$$

non $f(a,t,k)$ delakoa (3.19) formulaz definitua izan da.

(3.24) berdintza asintotikoa eta Abel-en batuketa-formula erabiliz, (3.25) delakoaren lehen batugaia ondoko eran kalkulatzen dugu:

$$\sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod}\, i)}} \log^{t+1} p = \theta(x;i,1) \log^t x - t\int_1^x \theta(y;i,1) \frac{\log^{t-1} y}{y}\, dy =$$

$$= \left(\frac{x}{\varphi(i)} + O\left(\frac{x}{\log x}\right)\right) \log^t x + O(x \log^{t-1} x). \qquad (3.26)$$

Kalkula dezagun orain (3.25) baturaren bigarren batugaia.

$$\sum_{\substack{p^a\leq x \\ a>1 \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod}\, i)}} f(a,t,k) \log^{t+1} p \leq \sum_{\substack{p^a\leq x \\ a>1}} f(a,t,k) \log^{t+1} p =$$

$$= O(x^{\frac{1}{2}} \log x) , \qquad (3.27)$$

(3.21) bornapenaren arauera.

(3.26) eta (3.27) berdintzak (3.25) delakoan ordezkatuz, frogatu egiten da teorema.

B I B L I O G R A F I A

1 T.M. APOSTOL. "Möbius functions of order k" Pacific journal of Mathematics. 32 - 1 (1970) 21 - 27.

2 .... "Dirichlet L-Functions and primitive characters". Proceedings of the American Mathematical Society. 31 - 2 (1972) 384 - 386.

3 .... "Introduction to the Analytic Number Theory". Springer - Verlag. Berlin. 1976

4 R. BALASUBRAMANIAN, K. RAMACHANDRA. "The place of an identity of Ramanujan of prime number theory". Proc Indian Acad. Sci. Vol 83.A, 4 (1976) 156 - 165.

5 R. BALASUBRAMANIAN. "A note of Dirichlet's L-functions". Acta Arith. 38, 3 (1980 - 81) 273 - 283.

6 A. BLANCHARCH. "Initation à la théorie analytique des nombres premiers". Dunod . Paris. 1969.

7 C. CALDERON. "Métodos de acotación del número de soluciones de sistemas relacionados con la función zeta de Riemann". Tesis. Zaragoza. 1977.

8 .... "Funciones aritméticas de tipo Mangoldt Λ_k^*, $\Lambda_{k,t}^*$". Publ. Mat. UAB, 21 (1.980) 159 - 162.

9 K. CHANDRASEKHARAM, R. NARASIMHAN. "Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions. Ann. of Math. 70 (1962), 93 - 136.

10 .... "The Approximate Functional Equation for a Class of Zeta - Functions. Math. Annalen 152, (1963) 30 - 64.

11 .... "On the mean value of the error term of a class of arithmetical functions". Acta Math., 112 (1964) 41 - 67.

12 K. CHANDRASEKHARAM. "Introduction to the Analytic Number Theory". Springer-Verlag. Berlín. 1968.

13 .... "Arithmetical Functions". Springer-Verlag. Berlín. 1970.

14 N. CHUDAKOV. "On zeros of Dirichlet's L-functions". Rec. Math. N.S. 19(61). 47 - 56. (1946).

15 H. DAVENPORT. "Multiplicative Number Theory". Markham. Chicago. 1968.

16 D. DAVIES. "An approximate functional equation for Dirichlet L-functions". University of Manchester (1964) 224 - 236.

17 L. E. DICKSON. "History of the Theory of Numbers". Vol. I, II, III. Chelsea Publishing Company. New York. 1971.

18 H.M. EDWARDS. "Riemann's zeta function". Academic Press. New York. 1974.

19 P.D.T.A. ELLIOTT. "On the distribution of the volues of Dirichlet L-series in the half plane $\sigma > \frac{1}{2}$ ". Indag. Math. 33 (1971). 222 - 234.

20 W. J. ELLISON, M. MENDÉS FRANCE. "Les nombers premiers". Hermann. Paris 1975.

21 E. FOGELS. "On the zeros of L-functions". Acta Arith. 11 (1965) 67 - 96.

22 A. FUJII, P. X. GALLAGHER, H.L. MONTGOMERY. "Some hybrid bounds for character sums and Dirichlet L-series. Topics in Number Theory. (Colloq., János Bolyai Math. Soc., Debrecen, 1974). 41 - 57. Amsterdam: North - Holland 1976.

23 P. X. GALLAGHER. "Local mean value and density estimates for Dirichlet L-Functions". Mathematics (1975) 259 - 264.

24 E. GROSSWALD, F.J. SCHNITZER. "A Class of modified ζ and L - Functions". Pacific Journal of Mathematics. 74, 2. (1978) 357 - 364.

25 G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD y G. POLYA. "Inequialities". Cambridge University Press. (5ª. edición). 1973.

26 G.H. HARDY, E.M. WRIGHT. "An introduction to the Theory of Numbers". Clarendon Press. Oxford, 1962.

27 D.R. HEATH - BROWN. "Hybrid bounds for Dirichlet L-Functions". Inventiones math. 47. (1978) 149 - 170.

28 E. HECKE. München Akad. Sitzungsberichte II, 8 (1937). 73 - 95.

29 M.N. HUXLEY. "The distribution of Prime Numbers". Oxford 1972.

30 A. IVIC. "An Application of Dirichlet Series to Certain Arithmetical Functions". Mathematika Balkanica, 3 (1973) 158 - 165.

31 A. IVIC. "On certain functions that generalize von Mangoldt functions $\Lambda(n)$. Mathematika Balkanica. 12 (27) (1975) 361 - 366.

32 H. IWANIEC. "On Zeros of Dirichlet´s L-series". Inventiones math. (1974) 97 - 104.

33 M. JUTILA. "On a density theorem of H.L. Montgomery for L-functions". Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A I 520 (1972) 13p.

34 .... "On mean values of L-funtions and short character sums with real characters". Acta Arithmetica XXVI (1975) 405 - 410.

35 .... "Recent progress in the theory of L-functions". Seminaire de Théorie des Nombres. Burdeaux. (exp. nº. 6). (1975-1976).

36 A.A. KARATSUBA. "Fundamentos de la teoría analítica de los números". Mir. Moscú. 1979.

37 A.F. LAVRIK. "The principle of the theory of nonstandard functional equations for Dirichlet Functions, consequences and applications of it". Proc. Steklov Inst. Math. 132 (1973) 77 - 92.

38 W. J. LEVEQUE. Reviews in Number Theory. Vol. 4. American Mathematical Society. Providence. Rhode Island. 1974.

39 U. V. LINNIK. "On the density of the zeros of L-series". Bull. Acad. Sci. URSS. Ser. Math. Izvestia Akad. Nauk. SSSR 10 (1946) 35 - 46.

40 B.K. MALAVIYA. "Extensión and generalization of Ramanujan's formula on Riemann's zeta function". The Journal of Scientific Research Banaras Hindu University VI (2) (1955-56). 206 - 210.

41 H.L. MONTGOMERY. "Topics in multiplicative number theory" Lectures Notes in Mathematics. Springer. Berlin-Heildenberg-New York. 1971.

42 H.L. MONTGOMERY, R.C. VAUGHAN. "Hilbert's inequality". J. London Math Soc. (2) 8 (1974) 73 - 82.

43 Y. MOTOHASHI. "An asymptotic formula in the theory of numbers". Acta Arith, 16. (1970) 255 - 264.

44 J. PINTZ. "Elementary methods in the theory of L-functions, I. Hecke's theorem". Acta Arithmetica XXXI (1976) 53 - 60.

45 .... "Elementaire methods in the theory of L-functions, II. On the greatest real zero of a real L-function" Acta arithmetica XXXI (1976) 273 - 287.

46 H.S.A. POTTER, E.C. TICHMARSCH. "The zeros of Epstein's zeta-function". Proc. London. Math. Soc. (2) 39 (1935). 372 - 384.

47 K. PRACHAR. "Primzahlverteilung". Springer. Berlin-Heildelberg-Göttingen. 1957.

48 H. RADEMACHER. "Remarks concerning the Riemannvon Mangoldt formula". Report of the Institute in Theory of Numbers, University of Colorado, Boulder (Colorado) (1959).

49 K. RAMACHANDRA. "A Simple Proof of the Mean Fourth Power Estimate for $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ and $L(\frac{1}{2} + it, \chi)$". Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 1 (1974) 81 - 97.

50 .... "Some Remarks on a theorem of Montgomery and Vaughan". J. of Number Theory 11 (1979) 465 - 471.

51 .... "A brief summary of some results in the analytic theory of numbers, II". Lecture Notes of Mathematics 938 (1982) 106 - 122.

52 V. V. RANE. "On the mean square value of Dirichlet L-series". J. London Math. Soc. (2) 21 (1980) 203 - 215.

53 .... "A note on the mean value of L-series". Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 90, 3 (1981) 273 - 286.

54 C. RYAVEC. "Riemann's functional equation" Rocky Mountain Journal of Mathematics, 5, 4 (1975) 623 - 627.

55 D. REDMOND. "An Asymptotic Formula in the Theony of Numbers" Math. Ann. 224 (1976) 247 - 268.

56 .... "Mean value theorems for a class of Dirichlet Series". Pacific Journal of Mathematics, Vol 78, 1 (1978) 191 - 231.

57 .... "An asymptotic Formula in the Theory of Numbers, II". Math. Ann. 234. (1978) 221 - 238.

58 E.C. TICHMARSH. "The theory of the Riemann zeta-function". Clarendon Press. Oxford, 1951.

59 .... "The Theory of Functions". Oxford. University Press. Oxford. 1939.